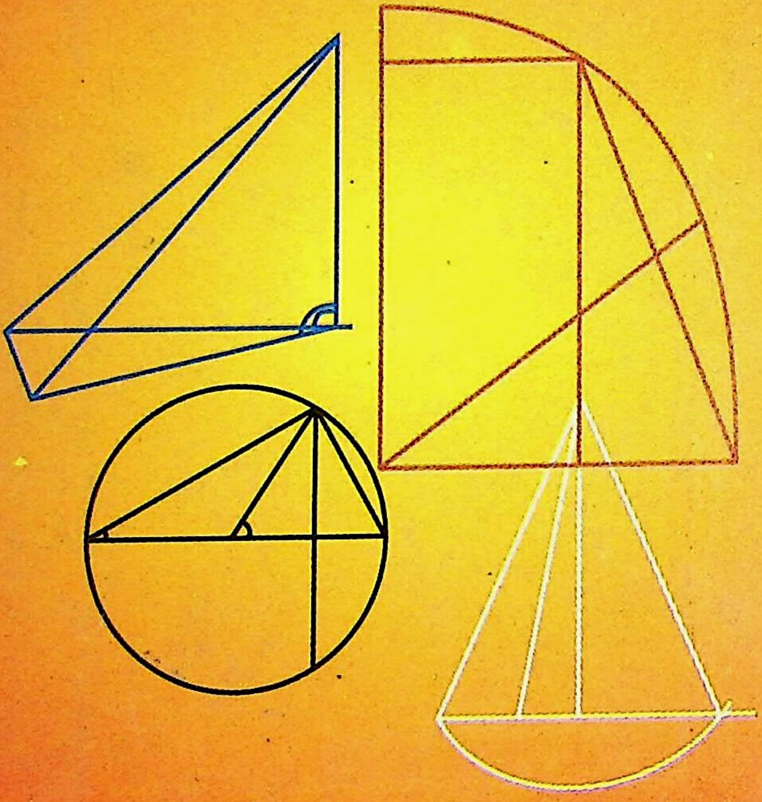
CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

पं. श्रीबलदेवमिश्रकृता

सरलत्रिकोणमितिः



डॉ. कमलाकान्तपाण्डेयः

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

परम पूज्य स्वा० श्री १००८ श्री चिदानन्द-
सरस्वती जी को सादर समर्पित -

वृजेशरञ्जनपाठकः

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

।।श्रीः।।

स्व. बलदेवमिश्रसंकलिता-

सरलत्रिकोणमितिः

व्याख्याकारः सम्पादकश्च-

डॉ. कमलाकान्त पाण्डेयः

ज्योतिषाध्यापकः

काशी हिन्दू विश्वविद्यालयीय-

श्रीरणवीर संस्कृत विद्यालयः, कमच्छा, वाराणसी।

प्रकाशकः

शारदा संस्कृत संस्थानम्

जगतगंज, वाराणसी-२२१००२

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्रकाशक -
शारदा संस्कृत संस्थान
सी.२७/५९ जगतगंज, वाराणसी-२२१००२
दूरभाष - (०५४२) २२०४९६८

अन्य प्राप्तिस्थान-
शारदाभवन
डी.३६/४४ अगस्त्यकुण्ड, वाराणसी।
दूरभाष - (०५४२) २४५२०३७

प्रथम संस्करण - २००२

मुद्रक -
सुदर्शन मुद्रक,
उत्तरीबेनिया,
वाराणसी।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

भूमिका

भारतीय संस्कृति एवं सर्वमान्य मान्यताओं के आधार पर आदि-ग्रन्थ 'वेद' है। जो ऋग् वेद, यजुर्वेद, सामवेद और अथर्वेदों में विभाजित है। वेद अपौरुषेय है अर्थात् पुरुषकृत नहीं है। वेद के प्रमुख ६ (षड्) अंग- शिक्षा, कल्प, निरूक्त, व्याकरण, छन्द और ज्योतिष हैं। श्रीमद् भास्कराचार्य के अनुसार–

'शब्दशास्त्रं मुखं ज्योतिषं चक्षुषी,
श्रोत्रमुक्तं निरुक्तं च कल्पः करौ।
या तु शिक्षास्य वेदस्य सा नासिका
पादपद्मद्वयं छन्द आद्यैर्बुधैः।।'

अपि च–

'वेदचक्षुः किलेदं स्मृतं ज्यौतिषम्'

अर्थात् वेदपुरुष का चक्षुः ज्यौतिष शास्त्र है। चक्षु होने के कारण इसे प्रकाश शास्त्र भी कहते है। ज्योतिष शास्त्र वेद से लेकर पुराणों (महाभारत, श्रीमद्भागवत महापुरण, व्रह्माण्डपुराण, विष्णुधर्मोत्तस्महापुराण, नारद महापुराण आदि) तक प्रचुरमात्रा में है।

हम सामान्य मानवों तक इस ज्योतिष शास्त्र को पहुँचाने वाले महर्षि कश्यप के अनुसार १८ (अष्टादश) ऋषि हैं। तद् यथा–

सूर्यः पितामहो व्यासो वसिष्ठोऽत्रिः पराशरः।
कश्यपो नारदो गर्गो मरीचिर्मनुरङ्गिराः।।
लोमशः पौलिशश्चैव च्यवनो यवनो भृगुः।
शौनकोऽष्टादशाश्चैते ज्योतिःशास्त्रप्रवर्त्तकाः।।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

ज्योतिष शास्त्र को 'काल' (समय) का नियामक शास्त्र भी कहा गया है। सामन्यतया हम कह सकते हैं कि–काल के सम्यग् ज्ञान के साथ-साथ उसमें होने वाली घटनाओं का ज्ञान कराने वाले शास्त्र को ज्योतिष शास्त्र कहते हैं। यथा-

यदुपचितमन्यजन्मनि शुभाशुभं तस्य कर्मणः प्राप्तिम्।
व्यंजयति शास्त्रमेतत् तमसि द्रव्याणि दीप इव।।

ज्योतिष शास्त्र में काल का विभाजन दो प्रकार से (मूर्त्तामूर्तकाल) किया गया है। सूर्यसिद्धान्तकार के अनुसार–

लोकानामन्तकृतकालः कालोऽन्यः कलनात्मकः।
स द्विधा स्थूलसूक्ष्मत्वात् मूर्त्तश्चामूर्त्तसंज्ञकः।।

एक सृष्टि का विनाश करने वाला काल और दूसरा समय सूचक काल। समय सूचक काल भी दो प्रकार का है–१. मूर्त काल (स्थूल समय जिसका हम व्यवहार में उपयोग कर सकते हैं यथा–घण्टा, मिनट, सेकेंड आदि अथवा घटी, पल, विपल आदि)।

२. अमूर्त्तकाल (अत्यन्त सूक्ष्मकाल जिसका अस्तित्व मात्र हम जान सकते हैं, परन्तु उपयोग नहीं कर सकते हैं। यथा–त्रुटि आदि)।

वेद विहित कार्यों के सम्पादन में भी काल का ही महत्त्व बतलाया गया है। इस विषय में भास्कराचार्य कहते हैं–

वेदास्तावद्यज्ञकर्मप्रवृत्ता यज्ञाः प्रोक्तास्ते तु कालाश्रयेण।
शास्त्रादस्मात् कालबोधो यतः स्याद्वेदाङ्गत्वं ज्यौतिषस्योक्तमस्मात्।।

मानवीय कार्य कलापों में भी ज्यौतिष शास्त्र आधान (गर्भाधान) से लेकर परलोकयान तक किसी न किसी रूप में सम्मिलित रहता है और हम तदनुसार चलकर इहलोक एवं परलोक दोनों का सुख प्राप्त करते हैं। पुंसवन, सीमन्तोन्नयन, जातकर्म नामकरणादि १५ संस्कारों से जातक को संस्कृत किया जाता है तथा १६ वे संस्कार से मनुष्य के पार्थिव शरीर

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

का विसर्जन किया जाता है। इन्हीं संस्कारों से संस्कृत पुरुष ही त्रिवर्ग (धर्म, अर्थ और काम) साधन का अधिकारी बनता है।

वेद पुरुष के चक्षुःस्थानीय ज्योतिष शास्त्र के तीन विभाग किये गये हैं-

१. सिद्धान्त ज्योतिष, २. संहिता ज्योतिष ३. होराज्योतिष (होराशास्त्र)

'सिद्धान्तसंहिताहोरा रूपस्कन्धत्रयात्मकम्।
वेदस्य निर्मलं चक्षुर्ज्योतिश्शास्त्रमकल्मषम्।।'

१. सिद्धान्त ज्यौतिष–सूक्ष्मतम अनिर्वाच्य काल से लेकर ब्रह्माण्ड की एक सौरसृष्टि के प्रलय तक की कालगणना–सौर, सावन, चान्द्र, नक्षत्रों के परिमाण भेद का ज्ञान, मान भेद का ज्ञान, ग्रहों की अनेक प्रकार की गतियों का ज्ञान, व्यक्त एवं अव्यक्त दो प्रकार के गणितों (अंक गणित, बीजगणित, रेखागणित, त्रैकोणीय गणित) का ज्ञान, सोदाहरण सोत्तर प्रश्नों का ज्ञान, पृथ्वी, नक्षत्र और सूर्यादि अनेक ग्रहों के गतिविधि ज्ञापक विविधप्रकार के (गणितीय, खगोलीय) यंत्रों से तुरीय, कपाल, नतोन्नत, फलक, नलिका आदि ग्रहबोधक यंत्रों का निर्माणज्ञान जिन ग्रन्थों के माध्यम से होता है उन्हें ज्योतिष में सिद्धान्त ग्रन्थ कहते हैं। सिद्धान्त ग्रन्थों में जैसे–सूर्यसिद्धान्त, ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त, सिद्धान्तसम्राट्, सिद्धान्त शिरोमणि इत्यादि। सिद्धान्त लक्षण को भास्कराचार्य ने इस प्रकार परिभापित किया है–

त्रुट्यादि प्रलयान्तकालकलना मानप्रभेदस्तथा
चारश्च द्युसदां द्विधा च गणितं प्रश्नास्तथा सोत्तराः।
भूधिष्ण्यग्रहसंस्थितेश्च कथनं यन्त्रादि यत्रोच्यते,
सिद्धान्तः स उदाहृतोऽत्र गणितस्कन्धप्रबन्धे बुधैः।।

२. फलित स्कन्ध–जिसका मुख्यतया होरा शास्त्र (जातक ज्यौतिष) नामकरण हुआ है। अहोरात्र (सम्पूर्ण दिनरात्रि) के आदि एवं अन्तिम

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(अ एवं त्र) का लोपकर 'होरा' शब्द की व्युत्पत्ति स्वयं वराहमिहिराचार्य ने की है। दिन रात्रि के २४ घंटे या ६० घटी ५/२ घटी १ घंटा, सटीक है। होरा शास्त्र के अन्तर्गत भारतीय ज्योतिष के फलित विभाग में १. जातक २. ताजिक ३. मुहूर्त्त ४. प्रश्नश्वर शकुन और ५. संहिता ये पाँच विभाग आते हैं।

१. जातक ज्योतिष–मानव के आजन्म मृत्युपर्यन्त समग्र जीवन का इदमित्थं भविष्य ज्ञान प्रतिपादक फलित ज्योतिष का नाम जातक ज्योतिष है।

जातक ग्रन्थों में बृहज्जातकम्, लघुजातकम्, जातकालंकार आदि उपलब्ध है।

प्रस्तुत 'सरलत्रिकोणमिति' एक संकलित ग्रन्थ हैं, श्रीबलदेव मिश्र ने इसे संकलित करके सं.१९९८ में प्रकाशित कराया था। अद्यावधि इसकी हिन्दी टीका नहीं की गयी है। मूल संस्कृत में होने के कारण तथा गणितीय प्रक्रिया क्लिष्ट होने के कारण सामान्य अध्येता इसे बुद्धिगम्य करने में समर्थ नहीं हो पाता। अध्येताओं की इस असुविधा को ध्यान में रखकर प्रस्तुत शालिनी नामक हिन्दी टीका का प्रणयन किया गया है। इसमें सूत्रों की विशद व्याख्या के साथ गणित प्रक्रिया को सोदाहरण प्रस्तुत करने का प्रयास किया गया है। यथास्थान चित्रों के माध्यम से जटिल विषयों को आधुनिक रीति से समझाया गया है। इस बात का पूरा ध्यान रखा गया है कि सामान्य पाठक भी जटिल विषयों को केवल पुस्तक के माध्यम से ही समझने में समर्थ हो सके।

इस ग्रन्थ के प्रकाशन के शुभ अवसर पर मैं सर्वप्रथम १०३ वर्षीय पूज्यपिता श्रीत्रिवेणी पाण्डेय के चरणों में प्रणामाञ्जलि अर्पित करता हूँ, उनकी ही प्रेरणा एवं आशीर्वाद से मैं ज्योतिष शास्त्र के अध्ययन में प्रवृत्त हुआ तथा उनके ही वचनों से उत्साहित होकर प्रस्तुत 'शालिनी' टीका को पूर्ण कर सका हूँ।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

अपनी स्नेहमयी पुत्री शालिनी को परिलक्षित करते हुये इस टीका का नाम शालिनी रखा गया है।

इस टीका को पूर्ण करने में अर्द्धाङ्गिनी मनिका पाण्डेय तथा पुत्रद्वय शशिकान्त पाण्डेय एवं उमाकान्त पाण्डेय द्वारा पूर्ण सहयोग प्राप्त हुआ मैं इन सभी के मंगल की कामना करते हुये उन्हें साधुवाद देता हूँ।

इस पुस्तक की व्याख्या करने में सत्प्रेरणा देने वालों मित्रों में विशेषकर मैं डॉ. विनोदराव पाठक एवं डॉ. शिवराम शर्मा (साहित्याध्यापक, श्रीरणवीर संस्कृत विद्यालय, का.हि.वि.वि.) जी का नाम हृदय से लेता हूँ और उनके प्रति आभारी भी हूँ। जन-जन तक इस पुस्तक को पहुँचाने का श्रेय डॉ. पाठक जी को है, इसमें कोई संदेह नहीं।

इन्हीं दो शब्दों के साथ शालिनी टीका युत सरलत्रिकोणमिति को प्रातः स्मरणीय परमपूज्य पिता पं. श्रीत्रिवेणी पाण्डेय जी के कर कमलों में सादर सर्पित करता हूँ।

जयति धाम्नां निधिः सूर्यः।

।। शमिति ।।

–कमलाकान्त पाण्डेय

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

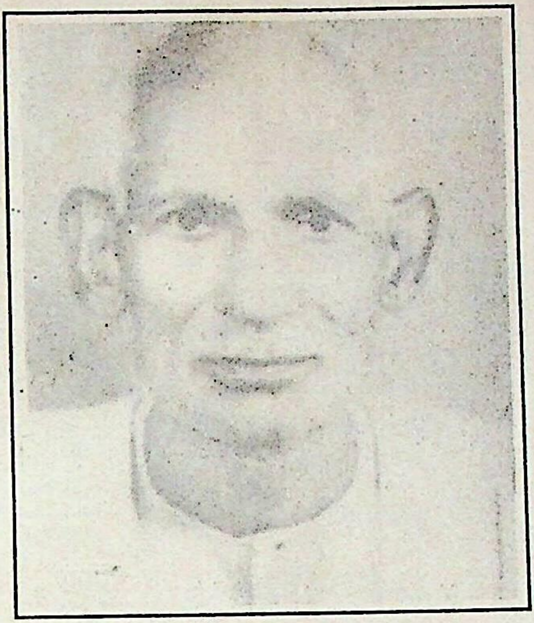
CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

विषयनुक्रमणिका

सूत्राणि	xi-xv
प्रथमाध्यायः	१-२२
द्वितीयाध्यायः	२३-२६
तृतीयाध्यायः	२७-७३
चतुर्थाध्यायः	७३-८९
पञ्चमाध्यायः	९०-११५
षष्ठाध्यायः	११५-१२१
सप्तमाध्यायः	१२२-१६१
अष्टमाध्यायः	१६२-१७१
नवमाध्यायः	१७१-१९१
दशमाध्यायः	१९२-२०२
एकादशाध्यायः	२०२-२१९
द्वादशाध्यायः	२२०-२२८
त्रयोदशाध्यायः	२२९-२४४
चतुर्दशाध्यायः	२४४-२५४

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2



परमपूज्य पिता श्रीत्रिवेणी पाण्डेय
के
करकमलों में सादर समर्पित.

-कमलाकान्तः

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

सूत्राणि

$\text{कर्ण}^{२} = \text{लम्ब}^{२} + \text{आधार}^{२}$ ।

$\text{कर्ण} = \sqrt{\text{लम्ब}^{२} + \text{आधार}^{२}}$

$\text{लम्ब}^{२} = \text{कर्ण}^{२} - \text{आधार}^{२}$ ।

$\text{लम्ब} = \sqrt{\text{कर्ण}^{२} - \text{आधार}^{२}}$

$\text{आधार}^{२} = \text{कर्ण}^{२} - \text{लम्ब}^{२}$ ।

$\text{आधार} = \sqrt{\text{कर्ण}^{२} - \text{लम्ब}^{२}}$

o o o

$$\text{ज्या अ} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \text{ज्या अ} = \text{Sin}\ \phi$$

$$\text{कोज्या अ} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \text{कोटिज्या अ} = \text{Cos}\ \phi$$

$$\text{स्पअ} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \text{स्पर्शज्या अ} = \text{tan}\ \phi$$

$$\text{कोस्प अ} = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \text{कोटिस्यर्श रेखा} = \text{Cot}\ \phi$$

$$\text{छे अ} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \text{छेदन रेखा} = \text{Sec}\ \phi$$

$$\text{कोछे अ} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \text{कोटि छेदन रेखा} = \text{Cosec}\ \phi$$

o o o

$$\text{कोछे अ} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} \qquad \text{ज्या अ} = \frac{१}{\text{कोछे अ}}$$

$$\text{छे अ} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} \qquad \text{कोज्या अ} = \frac{१}{\text{छे अ}}$$

$$\text{कोस्प अ} = \frac{१}{\text{स्प अ}} \qquad \text{स्प अ} = \frac{१}{\text{कोस्प अ}}$$

$$\text{कोस्प अ} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्या अ}} \qquad \text{स्प अ} = \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}}$$

o o o

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

ज्या^{2}अ + कोज्या^{2}अ = १। ज्याअ = $\sqrt{१-कोज्या^{2}अ}$

ज्या^{2}अ = १ - कोज्या^{2}अ। कोज्या अ = $\sqrt{१-ज्या^{2}अ}$

कोज्या^{2}अ = १ - ज्या^{2}अ।

० ० ०

स्प^{2}अ = छे^{2}अ–१। स्पअ = $\sqrt{छे^{2}अ - १}$

कोस्प^{2}अ = कोछे^{2}अ–१। कोस्प अ = $\sqrt{कोछे^{2} अ-१}$

छे^{2}अ = १ + स्प^{2}अ। छे अ = $\sqrt{१ + स्प^{2}अ}$

कोछे^{2}अ = १ + कोस्प^{2}अ। कोछेअ = $\sqrt{१ + कोस्प^{2}अ}$

० ० ०

ज्या अ x को छे अ = १.। वृत्तपरिधि = व्यास x π

कोज्या अ x छे अ = १.। $\pi = \frac{परिधि}{व्यास}$ = ३.१४१५९२६५३६.

स्प अ x कोस्प अ = १.। या, $\frac{३९२७}{१२५०}$ या, $\frac{२२}{७}$ (स्थूल रूप में)

० ० ०

६० विकला (६०″) = एककला (१′)।

६० कला (६०′) = एक अंश (१°)।

९० अंश (९०°) = एक समकोण (L)।

१००″ सेकेन्ड = १′ मिनट।

१००′ मिनट = १ ग्रेड।

१००ᵕ ग्रेड = एक समकोण।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

ज्या (९०° + अ) = कोज्या अ। कोस्प (९०° + अ) = – स्प अ

कोज्या (९०° + अ) = – ज्या अ। छे (९०° + अ) = – कोछे अ

स्प (९०° + अ) = – कोस्पअ। कोछे (९०° + अ) = छे अ

ज्या (– अ) = – ज्या अ। कोस्प (– अ) = – कोस्प अ

कोज्या (– अ) = कोज्या अ। छे (– अ) = छे अ

स्प (– अ) = – स्प अ। कोछे (– अ) = – कोछे अ

ज्या (९०° -- अ) = कोज्या अ। कोस्प (९०° -- अ) = स्प अ

कोज्या (९०° -- अ) = ज्या अ। छे (९०° -- अ) = कोछे अ

स्प (९०° -- अ) = कोस्प अ। कोछे (९०° -- अ) = छे अ

ज्या (१८०° -- अ) = ज्या अ। कोस्प (१८०°--अ)= –कोस्प अ

कोज्या (१८०°--अ)= – कोज्या अ। छे (१८०° -- अ) = – छे अ

स्प (१८०° -- अ) = – स्प अ। कोछे (१८०° -- अ) = कोछे अ

ज्या (१८०° + अ) = – ज्या अ। कोस्प (१८०°+ अ) = कोस्प अ

कोज्या (१८०° + अ) = – कोज्या अ। छे (१८०° + अ) = – छे अ।

स्प (१८०° + अ) = स्प अ। कोछे (१८०°+अ)= – कोछे अ

ज्या (अ + ब) = ज्या अ. कोज्या ब + कोज्या अ. ज्या ब

कोज्या (अ + ब) = कोज्या अ. कोज्या ब -- ज्या अ. ज्या ब.

ज्या (अ -- ब) = ज्या अ. कोज्या ब – कोज्या अ. ज्या ब.

कोज्या (अ -- ब) = कोज्या अ. कोज्या ब + ज्या अ. ज्या ब

$$\text{स्प (अ + ब)} = \frac{\text{स्पअ+स्प ब}}{\text{१–स्पअ.स्पब}}$$

$$\text{कोस्प (अ + ब)} = \frac{\text{कोस्पअ.कोस्पब–१}}{\text{कोस्पब+कोस्पअ.}}$$

$$\text{स्प (अ - ब)} = \frac{\text{स्पअ–स्पब}}{\text{१+स्पअ.स्पब}}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{कोस्प (अ – ब)} = \frac{\text{कोस्पअ.कोस्पब+१}}{\text{कोस्पब–कोस्पअ}}$$

o o o

ज्या २ अ = २ ज्या अ. कोज्या अ।

कोज्या २ अ = कोज्या^{२}अ – ज्या^{२}अ

या, १ – २ ज्या^{२}अ।

या, २ कोज्या^{२}अ–१

$$\text{स्प २ अ} = \frac{\text{२ स्पअ}}{\text{१–स्प}^{२}\text{अ}}$$

$$\text{कोस्प २ अ} = \frac{\text{कोस्प}^{२}\text{अ–१}}{\text{२ कोस्प अ}}$$

o o o

ज्या ३ अ = ३ ज्या अ – ४ ज्या^{३}अ।

कोज्या ३ अ = ४ कोज्या^{३}अ – ३ कोज्या अ.।

$$\text{स्प ३ अ} = \frac{\text{३ स्पअ – स्प}^{३}\text{अ}}{\text{१ – ३ स्प}^{२}\text{अ}}$$

o o o

$$\text{ज्या अ} = \text{२ ज्या} \frac{\text{अ}}{\text{२}} \text{. कोज्या} \frac{\text{अ}}{\text{२}} \text{।}$$

$$\text{कोज्या अ} = \text{१ – २ ज्या}^{२} \frac{\text{अ}}{\text{२}}$$

$$\text{स्प अ} = \frac{\text{२ स्प}\frac{\text{अ}}{\text{२}}}{\text{१–स्प}^{२}\frac{\text{अ}}{\text{२}}} \quad \text{कोस्प अ} = \frac{\text{कोस्प}^{२}\frac{\text{अ}}{\text{२}} - \text{१}}{\text{२ कोस्प}\frac{\text{अ}}{\text{२}}}$$

o o o

२ ज्या अ. कोज्या ब = ज्या (अ + ब) + ज्या (अ – ब)

२ कोज्या अ. ज्याब = ज्या (अ + ब) – ज्या (अ – ब)

२ कोज्या अ. कोज्या ब = कोज्या (अ + ब) + कोज्या (अ – ब)

२ ज्या अ. ज्या ब = कोज्या (अ – ब) – कोज्या (अ + ब)

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{ज्या स} + \text{ज्या द} = २\ \text{ज्या}\ \frac{\text{स} + \text{द}}{२}\ .\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{स} - \text{द}}{२}$$

$$\text{ज्या स} - \text{ज्याद} = २\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{स} + \text{द}}{२}\ .\ \text{ज्या}\ \frac{\text{स} - \text{द}}{२}$$

$$\text{कोज्या स} + \text{कोज्या द} = २\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{स} + \text{द}}{२}\ .\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{स} - \text{द}}{२}$$

$$\text{कोज्या स} - \text{कोज्या द} = २\ \text{ज्या}\ \frac{\text{स} + \text{द}}{२}\ .\text{ज्या}\ \frac{\text{द} - \text{स}}{२}$$

o o o

$$\text{ज्या अ. कोज्या ब} = \frac{१}{२}\ \text{ज्या (अ + ब)} + \text{ज्या (अ} - \text{ब)}$$

$$\text{कोज्याअ.ज्या ब} = \frac{१}{२}\ \text{ज्या (अ + ब)} -- \text{ज्या (अ} - \text{ब)}$$

$$\text{कोज्याअ. कोज्या ब} = \frac{१}{२}\ \text{कोज्या (अ + ब)} + \text{कोज्या (अ} - \text{ब)}$$

$$\text{ज्या अ. ज्या ब} = \frac{१}{२}\ \text{कोज्या (अ -- ब)} -- \text{कोज्या (अ + ब)}$$

o o o

वृत्त की परिधि $= २\pi \times$ त्रिज्या ($\pi \times$ व्यास)

$$\text{वृत्त का व्यास} = \frac{\text{वृत्त की परिधि}}{\pi}\ \left(\pi = \frac{२२}{७}\right)$$

$$\text{वृत्त की त्रिज्या} = \frac{\text{परिधि}}{२\pi}\ ।\ \left(\frac{\text{व्यास}}{२}\right)।$$

o o o

वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi \times$ त्रिज्या^{२}

गोले का क्षेत्रफल = ४ $\times$ π $\times$ त्रिज्या^{२}

बेलन का क्षेत्रफल = २ $\times \pi \times$ त्रिज्या $\times$ ऊचाई.

गोले का आयतन = $\frac{४}{३} \times \pi \times$ त्रिज्या^{३}

वेलन का आयतन = $\pi \times$ त्रिज्या^{२} $\times$ ऊचाई

शंकु का आयतन = $\frac{१}{३} \times \pi \times$ त्रिज्या^{२} $\times$ ऊचाई

❑

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

सरलत्रिकोणमितिः

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

।।श्रीः।।

सरलत्रिकोणमितौ-

प्रथमखण्डे प्रथमाध्यायः

मंगलाचरणम्

शिरसा कृत्वा नमनं काश्यां गौरीशविश्वनाथस्य।
रचयति सुन्दरगणितं त्रिकोणमितिसञ्ज्ञया प्रथितम्।।१।।
सुप्ता ननु जागरिताः सतन्द्रा निरलसाः कृता येन।
येन च निहिता शक्तिर्नमामि पूज्यं गुरुप्रवरम्।।२।।
यद्यपि रचितं मूलं भारतवर्षीयपूर्ववृद्धिभः।
यूरपदेशसुविज्ञैः प्रवृद्धमिति साधुवादार्हा।।३।।
गणितज्ञानसमुद्रे विनिमग्ना विमलरत्ननिचयार्थम्।
ये ते सर्वे सभ्याः स्तुत्याः सर्वत्र मानार्हा।।४।।
महामहोपाध्यायैर्बापूदेवाभिधैः कृतं पूर्वम्।
वर्षशतार्धं जातं रचितमतो नूतनाकृत्या।।५।।
नास्ति कृतित्वं किञ्चिन्ममात्र विज्ञाप्यतेऽतिविनयेन।
शास्त्रमनन्तं दृष्ट्वा सारस्संस्थाप्यते पुरतः।।६।।
कृपया विलोक्य हृष्टा भवन्तु खलु येऽत्र सन्मनसः।
अस्मिन्नेव हि विषये लिखन्तु बहु पुस्तकं भूयः।।७।।

व्याख्याकारकृत मंगलाचरणम्

तं प्रणम्याद्यदेवं गणेशं गुरुं भारतीमादिदेवीं ततो भास्करम्।।
श्रीत्रिवेणीप्रसादप्रसादान्मया, शालिनीनामटीका मुदा तन्यते।।

मैं उन सर्ववन्द्य आदिदेव गणेशजी को, गुरु को, आदिदेवी सरस्वती को एवं जगन्नियता भगवान् सूर्य को प्रणाम करके पूज्यपिता श्रीत्रिवेणी प्रसाद के आशीर्वाद से आनन्दपूर्वक शालिनीनामक टीका का विस्तार कर रहा हूँ।

१ प्रक्रमः—त्रिकाणस्य मानमित्येव त्रिकोणमिति शब्दार्थः, त्रिकोणशब्देनैव त्रिभुजस्य स्थितिर्ज्ञायते, कोणशब्देनैव भुजैस्सार्धं कोणानां सम्बन्धोऽपि प्रकाशितो भवति सहकारात्, तेनैतच्छास्त्रेण यस्मिन् कस्मिन्नपि त्रिभुजे भुजेभ्यस्तत्सम्मुखकोण-सम्बन्धेभ्यश्च त्रिभुजफलादीनां ज्ञानं भवति। भारतीयगणितशास्त्रे ज्योत्पत्त्या

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

क्षेत्रफलाध्यायेन च मूलरूपेण यद्गणितं तदेव विस्तरेण त्रिकोणमिति नाम्ना व्यवहृतं जातम्। एतत्ववश्यं स्वीकरणीयं यल्लघुरिक्थगणितसाहाय्येन काल्पनिकमूल-गणितबलेन चेदमतिविस्तृतं पाश्चात्यैः कृतम्, अत्र ग्रन्थे विस्तृतस्यास्य विषयस्य सार एव गृह्यते।

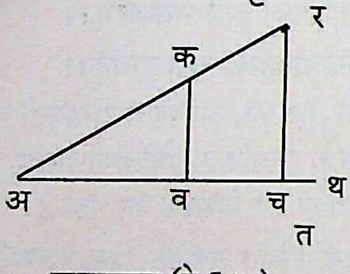
रेखयोः संयोगेन कोण उत्पद्यते। रेखागणिते कोणमानं समकोणद्वयादधिकं प्रयोजनार्थं न गृह्यते किन्तु त्रिकोणमितौ कोणमानं यथेष्टं भवितुमर्हति, एकस्यां रेखायां विन्दुमेकं स्थिरीकृत्य तत्र द्वितीयरेखायाः परिभ्रमणेन यथेष्टं कोणमानमुत्पद्यते।।

अथ जीवादीनां परिभाषा

२ प्र०–"चापे तु दत्त्वोभयतो दिगङ्कात्। ज्ञेयं तदग्रद्वयबद्ध-रज्वोरर्ध ज्यकार्धमि"ति भास्कराचार्यवचनेन तथा–

"अतोऽत्र पूर्वचिह्नाच्च भुजांशानेकतस्ततः। यावत्तदग्रकं तिर्यग्रेखा प्राक्सूत्रतो ज्यके" ति कमलाकरवचनेन च चापस्यैकप्रान्तात्तदन्य-प्रान्तगतव्यासरेखोपरिलम्बः तच्चापज्या।

नवीनमते तु **कोणोत्पादकरेखयोरेकस्यामिष्टस्थाने विन्दुं कृत्वा तस्मादपरस्यां कृताल्लम्बात् कोणेष्टविन्द्वन्तरेणाप्ताद्यल्लब्धं तत्कोणस्य ज्या स्यात्।** अस्याः कोणीयज्यापरिभाषायाः प्राचीनाचार्याणां परिभाषैव मूलम्। यतः



कल्पयतो टरथत, अर त्रिज्याव्यासार्धवृत्तम्। तथा रथ, रअथ कोणस्य चापम्, अ थ रेखापरि र, क विन्द्वोः क्रमेण रच, कव लम्बौ कार्यौ तदा प्राचीनाचार्यपरिभाषया रच, रथ चापस्य ज्या। तदा अरच, अकब त्रिभुजयोः

साजात्यात् (रे ६।४)

$$\frac{\text{कव}}{\text{अक}} = \frac{\text{रच}}{\text{अर}} = \frac{\text{रच}}{\text{त्रि}} \quad \text{अथ यदि त्रि} = १ \text{ तदा } \frac{\text{कव}}{\text{अक}} = \frac{\text{रच}}{१}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

तु अभीष्ट त्रिज्यया भक्ता चापज्या कोणज्या भवतीति।

अथ प्राचीनाचार्यैरेव चापस्यैकप्रान्तात्तदन्यप्रान्तगतव्यासरेखोपरि कृतस्य लम्बस्य ज्या संज्ञा कथं कृता तत्र विचारे इदं प्रतिभाति यत् चापं धनूरूपं भवति तस्य प्रान्तद्वयबद्धा रेखा गुणः ज्या वा पूर्णज्या शब्देनापि व्यवह्रियते। ज्यौतिषसिद्धान्ते पूर्णज्याया उपयोगाभावात् पूर्णज्याया अर्धस्य संज्ञा धनुषोऽर्धस्य जीवाकृता, "अर्धज्यैव ज्याभिधानात्र वेद्ये" ति भास्करः। एवं कोटिचापस्य जीवा कोटिज्या, चापस्य स्पर्शकारिणी रेखा चापस्पर्शरेखा इत्यादि सफलासंज्ञाः।

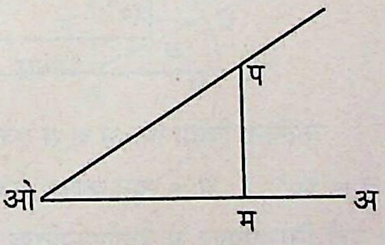
३ प्र०—इष्ट व्यासार्धे कोणतत्संमुखचापयोरंशादिसंख्या तुल्यैव भवति। भारतीयगणिते चापस्यैव प्राधान्यम्। यथा नवीनगणितेऽभीष्ट कोणयोर्योगान्तरज्यादिसाधनं क्रियते तथैव भारतीयज्यौतिषसिद्धान्ते चापयोर्योगस्यान्तरस्य च जीवाकोटि-ज्यादिसाधनमस्ति। अत्र ग्रन्थे नवीनरीत्या कोणस्यैव प्राधान्यमधिकृत्य त्रिकोणमिति चमत्कारः प्रदर्शितो भविष्यति स्थानविशेषे भारतीयचापीयज्यादिप्रकाराणां समावेशोऽपि स्थास्यत्येव।

४ प्र०—कोणस्य धनत्वं कोणोत्पादकरेखयोरेकां स्थिरीकृत्यान्यस्याः दक्षिणावर्त्तभ्रमणेन स्वीक्रियते भमण्डलस्य तथैव भ्रमणात्, भमण्डलेन सार्धत्रिकोणमितेः सम्बन्धात्, एवं वामभ्रमणं घटीयन्त्रस्य सूच्योरिव भ्रमणं ऋणत्वं स्वीक्रियते। कोणस्यैष धनर्णसम्बन्धः कोणभ्रमणस्य पुनः पुनः पूर्णता सत्वेऽपि तथैव तिष्ठति। यथा यदि अकोणो धनं तदा ३६०° + अ = धनकोणः यद्वा, २ x ३६०° + अ = धनकोण इत्यादि। एवं यदि अकोणमानमृणं तदा–३६०° –अ,

–२ x ३६०° –अ इत्यादि ऋणमेव।

कोणीयत्रैकोणमितिकसम्बन्धः।

५ प्र०—अत्राध्याये समकोणान्न्यूनकोणस्यैव ज्याकोटिज्यादीनां विचारः क्रियते। कल्प्यते काचिद्भ्रमन्ती रेखा ओप या च ओअ स्थितेः ओप स्थितिं



RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्राप्य ∠अओप कोणमुत्पादितवती। अत्र भ्रमन्त्यां रेखायां क्वापि प विन्दुं मत्वा ओअ रेखोपरि पम लम्बः कार्यः। तदा मओप त्रिभुजे ओप कर्णः, पम लम्बः तथा ओम आधारः तदा त्रैकोणमितिसम्बन्धो निम्नरीत्या प्रकाश्यते यथा–

$$\frac{\text{म प}}{\text{ओप}} \text{ अर्थात् } \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \text{ज्या} = \text{ज्या } \angle \text{ अओप}$$

$$\frac{\text{ओम}}{\text{ओप}} \text{ अर्थात् } \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \text{कोटिज्या} = \text{कोज्या } \angle \text{ अओप}$$

$$\frac{\text{म प}}{\text{ओ म}} \text{ अर्थात् } \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \text{स्पर्श रेखा} = \text{स्प } \angle \text{ अओप}$$

$$\frac{\text{ओ म}}{\text{म प}} \text{ अर्थात् } \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \text{कोटि स्पर्श रेखा} = \text{कोस्प } \angle \text{ अओप}$$

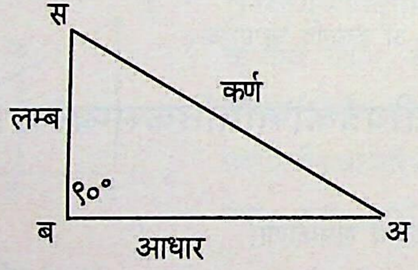
$$\frac{\text{ओ प}}{\text{म प}} \text{ अर्थात् } \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \text{कोटिच्छेदनरेखा} = \text{कोछे } \angle \text{ अओप}$$

$$\frac{\text{ओप}}{\text{ओम}} \text{ अर्थात् } \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \text{छेदनरेखा} = \text{छे } \angle \text{ अओप}$$

तथा १–कोज्याअओप = उत्क्रमज्या = उ ∠ अओप

तथा १–ज्याअओप = कोटचुत्क्रमज्या = को उ ∠ अओप

शालिनी–कोणीयत्रिकोणमितीयसम्बन्ध ज्ञान–



कल्पना किया कि अ ब स एक न्यून कोण समकोण त्रिभुज है, जिसका ∠ ब = ९०°, ∠ अ = न्यून कोण, अब = आधार, ब स = लम्ब, अ स = कर्ण है। यहाँ निम्नप्रकार से त्रैकोणमितिक सम्बन्ध को प्रस्तुत किया जा रहा है–

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{ज्या अ} = \frac{\text{ब स}}{\text{अ स}} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \text{Sin}\,\varphi$$

$$\text{कोज्या अ} = \frac{\text{अ ब}}{\text{अ स}} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \text{Cos}\,\varphi$$

$$\text{स्प अ} = \frac{\text{ब स}}{\text{अ ब}} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \text{tan}\,\varphi$$

$$\text{कोस्प अ} = \frac{\text{अ ब}}{\text{ब स}} = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \text{Cot}\,\varphi$$

$$\text{छे अ} = \frac{\text{अ स}}{\text{अ ब}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \text{Sec}\,\varphi$$

$$\text{को छे अ} = \frac{\text{अ स}}{\text{ब स}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \text{Cosec}\,\varphi$$

विशेष– $\text{कर्ण}^{2} = \text{लम्ब}^{2} + \text{आधार}^{2}$

$\text{लम्ब}^{2} = \text{कर्ण}^{2} - \text{आधार}^{2}$

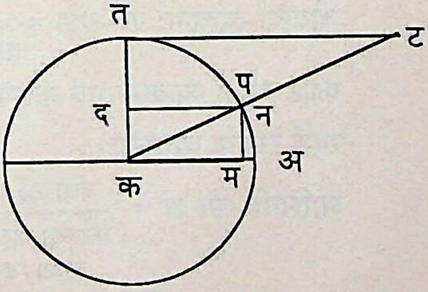
$\text{आधार}^{2} = \text{कर्ण}^{2} - \text{लम्ब}^{2}$

एवमेव– $\text{कर्ण}^{2} = \sqrt{\text{लम्ब}^{2} + \text{आधार}^{2}}$

$\text{लम्ब}^{2} = \sqrt{\text{कर्ण}^{2} - \text{आधार}^{2}}$

$\text{आधार}^{2} = \sqrt{\text{कर्ण}^{2} - \text{लम्ब}^{2}}$

चापीयत्रैकोणमितिक सम्बन्धः।



६ प्र०-कल्पयते तअअ इष्टवृत्तं यस्य केन्द्रम् क तथा अकप इष्टकोणस्तथा अप इष्टचापम् यस्य कोटिः तप। प विन्दोः कअ कत व्यासार्धोपरि पम, पद, लम्बौ कार्यौ तथा अ,

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

त विन्द्वोः अन तट स्पर्श रेखे कार्ये।

तदा पम = अपचापस्य ज्या = ज्या अप = ज्या अ,

पद = अपकोटि चापस्य पतमितस्य ज्या = कोज्याअप = कम = कोज्याअ

$$\text{अन = अपचापस्य स्पर्श रेखा} = \frac{\text{पम} \times \text{कअ}}{\text{कम}} = \frac{\text{ज्याअ} \times \text{त्रि}}{\text{कोज्या अ}} = \text{स्पअ}$$

$$\text{तट = अपकोटेः स्पर्श रेखा} = \frac{\text{पद}\times\text{कत}}{\text{कद}} = \frac{\text{कम} \times \text{कअ}}{\text{पम}} =$$

$$\frac{\text{कोज्याअ.त्रि}}{\text{ज्याअ}} = \text{कोस्पअ}$$

$$\text{कन = अपचापस्य छेदनरेखा} = \frac{\text{कप} \times \text{कअ}}{\text{कम}} = \frac{\text{त्रि} \times \text{त्रि}}{\text{कोज्याअ}} =$$

$$\frac{\text{त्रि}^2}{\text{कोज्याअ}} = \text{छे अ}$$

$$\text{कट = अप कोटेश्छेदनरेखा} = \frac{\text{कप}\times\text{कत}}{\text{कद}} = \frac{\text{त्रि}\times\text{त्रि}}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{त्रि}^2}{\text{ज्याअ}} = \text{कोछेअ}$$

मअ = अप चापस्योत्क्रमज्या=कअ--कम=त्रि-कोज्याअ=उअ

तद = अपकोटेरुत्क्रमज्या=कत-कद= त्रि-ज्याअ=कोउअ

अत्रेदं स्मर्त्तव्यं यत् त्रिकोणमितिसम्बन्धः संख्यात्मक एव। एवमत्र ज्या कोटिज्या स्पर्श रेखाणां क्रमतः कोटि च्छेदन, छेदनकोटि स्पर्श रेखाभि-

व्युत्क्रमसम्बन्धोऽस्ति। यथा कोछेअ $= \frac{१}{\text{ज्याअ}}$ अतः कोटि च्छेदनरेखा जीवाया व्युत्क्रमः एवं छेअ $= \frac{१}{\text{कोज्याअ}}$ अतश्च्छेदनरेखा कोटिज्याया व्युत्क्रमः एवं कोस्पअ $= \frac{१}{\text{स्प अ}}$ अतः कोटिस्पर्श रेखा स्पर्श रेखाया व्युत्क्रमः।

शालिनी—स्प अ $= \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}}$

$$= \frac{\text{लम्ब/कर्ण}}{\text{आधार/कर्ण}}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$= \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} \times \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$$

$$= \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \text{स्प अ}$$

$$\text{को स्प अ} = \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}}$$

$$= \frac{\text{आधार/कर्ण}}{\text{लम्ब/कर्ण}}$$

$$= \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} \times \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$$

$$\frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \text{कोस्प अ}$$

$$\text{छे अ} = \frac{१}{\text{कोज्या अ}}$$

$$= \frac{१/१}{\text{आधार/कर्ण}}$$

$$= \frac{१}{१} \times \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$$

$$= \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \text{छे अ.}$$

$$\text{कोछे अ} = \frac{१}{\text{ज्या अ}}$$

$$= \frac{१/१}{\text{लम्ब/कर्ण}}$$

$$= \frac{१}{१} \times \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$= \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \text{को छे अ.}$$

$$\text{एवञ्च–कोस्प अ} = \frac{१}{\text{स्प अ}}$$

$$= \frac{१/१}{\text{लम्ब/आधार}}$$

$$= \frac{१}{१} \times \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$$

$$= \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \text{कोस्प अ.}$$

$$\text{स्प अ} = \frac{१}{\text{कोस्प अ}}$$

$$= \frac{१/१}{\text{आधार/लम्ब}}$$

$$= \frac{१}{१} \times \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$= \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \text{स्प अ.}$$

यहाँ स्मरण रहे कि त्रिकोणमितीय सम्बन्ध संख्यात्मक होता है। ज्या, कोटिज्या, स्पर्श रेखाओं का क्रमशः कोटिच्छेदन (कोछे), छेदन, कोटिस्पर्श रेखाओं के साथ व्युत्क्रमसम्बन्ध होता है।

विशेष–ज्या = ज्या।

कोज्या = कोटि ज्या।

स्प = स्पर्शरेखा।

कोस्प = कोटि स्पर्श रेखा।

छे = छेदन रेखा।

को छे = कोटि-छेदन रेखा।

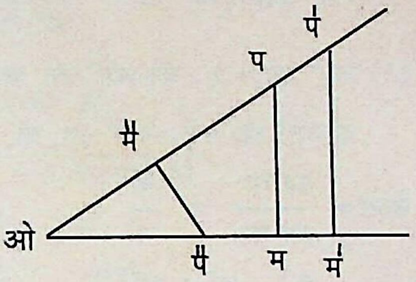
RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

कस्यापि कोणस्य त्रैकोणमितिकसम्बन्धः सर्वदा स्थिरः

७ प्र०-यदि भ्रमन्त्याम् ओप रेखायां कश्चिदपरविन्दुः पं तस्माद्विन्दोः

वर्धित ओम रेखायां पं मं लम्बं विधाय ओमं पं त्रिभुज-सम्बन्धेनापि यदि त्रैकोण-मितिकसम्बन्ध आनीयते तदापि स एव सम्बन्ध आगच्छति यथा ओपम त्रिभुज वशेन, यतस्त्रि-



भुजयोः ओ कोणः स एव म, मं विन्द्वोः कोणौ समकोणौ तेन त्रिभुजयोः साजात्यं ततः (रे६।४)? $\frac{\text{म प}}{\text{ओम}} = \frac{\text{मं पं}}{\text{ओपं}}$

अर्थात् म ओ प कोणस्य ज्या सैव यत्र कत्रापि ओ प रेखायां विन्दुः स्वीक्रियते।

पुनः $\frac{\text{ओ म}}{\text{ओ प}} = \frac{\text{ओमं}}{\text{ओ पं}}$ तथा $\frac{\text{म प}}{\text{ओम}} = \frac{\text{मं पं}}{\text{ओमं}}$, अस्मादिदं सिध्यति।

यत्र कुत्रापि ओप रेखायां विन्दुश्चेत कोटिज्या वा स्पर्श रेखापि सैव। अनयैव युक्त्या अन्ये सम्बन्धा अपि ज्ञेयाः। एवं ओप रेखायामपि क्वापि मैं विन्दुं गृहीत्वा मैं पैं लम्बं ओपं रेखायां विधाय यदि क्रिया क्रियते तथापि स एव सम्बन्धः समागच्छति।

अथ प्रधानत्रैकोणमितिकसम्बन्धाः प्रदर्श्यन्ते–

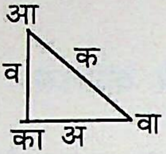
८ प्र०–कल्प्यतां काआवा जात्यत्रिभुजं यत्र क अ व भुजाः, का = समकोणः तदा परिभाषाबलेन ज्याआ =

$\frac{\text{वा का}}{\text{आ वा}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$;

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{तथा कोज्या आ} = \frac{\text{आ का}}{\text{आ वा}} = \frac{\text{व}}{\text{क}};$$



$$\therefore \text{ ज्या}^{२}\text{ आ}+\text{कोज्या}^{२}\text{ आ} = \frac{\text{अ}^{२}}{\text{क}^{२}} + \frac{\text{व}^{२}}{\text{क}^{२}} = \frac{\text{अ}^{२}+\text{व}^{२}}{\text{क}^{२}} = \frac{\text{क}^{२}}{\text{क}^{२}} = १$$

अनु. (१) $\text{ज्या}^{२}\text{ आ} = १ - \text{को ज्या}^{२}\text{ आ}$, वा, $\text{ज्या आ} = \sqrt{१-\text{कोज्या}^{२}\text{ आ}}$

$\text{कोज्या}^{२}\text{ आ} = १ - \text{ज्या}^{२}\text{ आ}$, वा, $\text{को ज्या आ} = \sqrt{१-\text{ज्या}^{२}\text{ आ}}$

$$\text{एवं छेआ} = \frac{\text{आ वा}}{\text{आ का}} = \frac{\text{क}}{\text{व}}$$

$$\text{छे}^{२}\text{आ} = \frac{\text{क}^{२}}{\text{व}^{२}} = \frac{\text{व}^{२}+\text{अ}^{२}}{\text{व}^{२}} = १ + \frac{\text{अ}^{२}}{\text{व}^{२}} = १ + \text{स्प}^{२}\text{ आ।}$$

अनु. (२) $\text{छे}^{२}\text{ आ} - १ = \text{स्प}^{२}\text{ आ} \therefore \text{ छेआ} = \sqrt{१+\text{स्प}^{२}\text{ आ}}$

$\text{स्प}^{२}\text{ आ} = \text{छे}^{२}\text{ आ}-१$, $\text{स्प आ} = \sqrt{\text{छे}^{२}\text{ आ}-१}$

$$\text{एवम् को छेआ} = \frac{\text{आ वा}}{\text{वा का}} = \frac{\text{क}}{\text{अ}}, \text{कोछे}^{२}\text{आ} = \frac{\text{क}^{२}}{\text{अ}^{२}} = \frac{\text{अ}^{२}+\text{व}^{२}}{\text{अ}^{२}} =$$

$$१ + \frac{\text{व}^{२}}{\text{अ}^{२}} = १ + \text{कोस्प}^{२}\text{ आ}$$

अनु. (३) $\text{कोछे}^{२}\text{ आ}-\text{कोस्प}^{२}\text{ आ}=१$, $\text{को छे आ} = \sqrt{१+\text{को स्प}^{२}\text{ आ}}$

$\text{को स्प}^{२}\text{ आ} = \text{को छे}^{२}\text{ आ}-१$, $\text{को स्प आ} = \sqrt{\text{को छे}^{२}\text{ आ}-१}$

शालिनी– $\text{ज्या}^{२}\text{ अ} + \text{कोज्या}^{२}\text{ अ} = १$

$$\text{वा प} = \text{ज्या}^{२}\text{ अ} + \text{कोज्या}^{२}\text{ अ}$$

$$= \frac{\text{लम्ब}^{२}}{\text{कर्ण}^{२}} + \frac{\text{आधार}^{२}}{\text{कर्ण}^{२}}$$

$$= \frac{\text{लम्ब}^{२}+\text{आधार}^{२}}{\text{कर्ण}^{२}}$$

$$= \frac{\text{कर्ण}^{२}}{\text{कर्ण}^{२}} \; १ = \text{द. प.}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{ज्या}^2 \text{ अ} = १ - \text{कोज्या}^2 \text{ अ}$$

$$= \frac{१}{१} - \frac{\text{आधार}^2}{\text{कर्ण}^2}$$

$$= \frac{\text{कर्ण}^2 - \text{आधार}^2}{\text{कर्ण}^2}$$

$$= \frac{\text{लम्ब}^2}{\text{कर्ण}^2} = \text{ज्या}^2 \text{ अ}$$

$$\therefore \text{ ज्या अ} = \sqrt{१ - \text{कोज्या}^2 \text{ अ}}$$

$$\text{कोज्या}^2 \text{ अ} = १ - \text{ज्या}^2 \text{ अ}$$

$$= \frac{१}{१} - \frac{\text{लम्ब}^2}{\text{कर्ण}^2}$$

$$= \frac{\text{कर्ण}^2 - \text{लम्ब}^2}{\text{कर्ण}^2}$$

$$= \frac{\text{आधार}^2}{\text{कर्ण}^2} = \text{कोज्या}^2 \text{ अ}$$

$$\therefore \text{ कोज्या अ} = \sqrt{१ - \text{ज्या}^2 \text{ अ}}$$

$$\text{छे}^2 \text{ अ} = १ + \text{स्प}^2 \text{ अ}$$

$$= \frac{१}{१} + \frac{\text{लम्ब}^2}{\text{आधार}^2} = \frac{\text{आधार}^2 + \text{लम्ब}^2}{\text{आधार}^2}$$

$$= \frac{\text{कर्ण}^2}{\text{आधार}^2} = \text{छे}^2 \text{ अ}$$

$$\therefore \text{ छे अ} = \sqrt{१ + \text{स्प}^2 \text{ अ}}$$

$$\text{को छे}^2 \text{ अ} = १ + \text{कोस्प}^2 \text{ अ}$$

$$= \frac{१}{१} + \frac{\text{आधार}^2}{\text{लम्ब}^2} = \frac{\text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2}{\text{लम्ब}^2}$$

$$= \frac{\text{कर्ण}^2}{\text{लम्ब}^2} = \text{को छे}^2 \text{ अ}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\therefore \text{ को छे अ} = \sqrt{\text{१ + कोस्प}^2 \text{ अ}}।$$

अत्र ये सम्बन्धाः प्रदर्शितास्ते (रे १।४७) बलेनैव सिद्धयन्ति न स्वतन्त्र-रूपेण अतोऽग्रे लिखिता नियमाः विशेषेण स्मरणार्हाः।

१. कोछेआ x ज्या आ=१, को छे आ = $\frac{\text{१}}{\text{ज्या आ}}$ ज्याआ = $\frac{\text{१}}{\text{कोछे आ}}$

छे आ x कोज्या आ = १, छे आ = $\frac{\text{१}}{\text{कोज्या आ}}$, कोज्या आ = $\frac{\text{१}}{\text{छे आ}}$

कोज्या आ x स्प आ = १, कोस्प आ = $\frac{\text{१}}{\text{स्प आ,}}$ स्पआ = $\frac{\text{१}}{\text{कोस्पआ}}$

२. स्प आ = $\frac{\text{ज्या आ}}{\text{कोस्याआ}}$, कोस्प आ = $\frac{\text{कोज्या आ}}{\text{ज्याआ}}$

३. ज्या^{2} आ + कोज्या^{2} आ = १, छे^{2} आ = १ + स्प^2 आ,

कोछे आ = $\sqrt{\text{१ + कोस्प}^2\text{ आ}}$

उ. (१) ज्या^{2} आ x कोस्प^2 आ + कोज्या^{2} आस्प^2 आ = १ साध्यताम्।

अत्र यदि मानानि ज्या कोटि ज्यायां परावर्त्यन्ते तदा साधने सौलभ्यम्

अतः प्रथमपक्षः ज्या^{2} आ x $\frac{\text{कोज्या}^2\text{ आ}}{\text{ज्या}^2\text{ आ}}$ +कोज्या^{2} आ X $\frac{\text{ज्या}^2\text{ आ}}{\text{कोज्या}^2\text{ आ}}$

कोज्या^{2} आ + ज्या^{2} आ = १।

उ. (२) छे^{4} इ–छे^{2} इ = प^2 = स्प^2 इ × स्प^4 इ साध्ययताम्

अथ प्रथमः पक्षः = छे^{2} इ (छे^{2} इ–१)=(१+स्प^2 इ) स्प^2 इ=स्प^2 इ+स्प^{4}इ

उ. (३) $\sqrt{\text{छे}^2\text{ आ+को छे}^2}$ आ = स्पआ + कोस्पआ इति साध्यताम्

यतः छे^{2} आ = १ + स्प^2 आ, कोछे^{2} आ = १ + कोस्प^2 आ

$\therefore$ छे^{2} आ + कोछे^{2} आ = स्प^{2}आ + २ + कोस्प^{2}आ = स्प^{2}आ +

२ स्पआ कोस्पआ + कोस्प^{2}आ = (स्पआ + कोस्पआ)^2

$\therefore$ $\sqrt{\text{छे}^2\text{ आ + कोछे}^2\text{ आ}}$ = स्पआ + कोस्पआ।

❑

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(१) अभ्यासार्थमुदाहरणानि

१. कोस्पअ छेअ ज्याअ = १

२. (१–कोज्या^{२} अ) कोछे^{२} अ = १

३. कोस्प^{२}अ (१–कोज्या^{२} अ) = कोज्या^{२}अ

४. ज्याअछेअ $\sqrt{\text{कोछे}^२\text{अ}-१}$ = १

५. कोज्याअ $\sqrt{\text{कोस्प}^२\text{अ}+१} = \sqrt{\text{कोछे}^२\ \text{अ}-१}$

६. ज्या^{२} अ कोस्प^{२}अ + ज्या^{२} अ = १

७. (१ + स्प^{२}अ) (१–ज्या^{२}अ) = १

८. छे^{४} अ–१ = २ स्प^{२}अ + स्प^४ अ

९. (स्पअकोछेअ)^२–(ज्याअछेअ)^२ = १

१०. (छेअकोस्पअ)^२–(कोज्याअकोछेअ)^२ = १

११. स्प^{२}अ–कोस्प^{२}अ = छे^{२} अ–कोछे^{२} अ

(१) अभ्यासार्धमुदाहरणानि साध्यन्ते–

शालिनी-(१) कोस्प अ. छे अ. ज्या अ = १

वाम पक्षः = कोस्प अ. छे अ. ज्या अ.

$$= \frac{\text{आधारः}}{\text{लम्बः}} \times \frac{\text{कर्णः}}{\text{आधारः}} \times \frac{\text{लम्बः}}{\text{कर्णः}} = १ = \text{दक्ष पक्षः}$$

अत उपपन्नम्।

अथवा – कोस्प अ. छे अ. ज्या अ

$$= \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} \times \frac{१}{\text{कोज्या अ}} \times \text{ज्याअ} = १$$

(२) (१ - कोज्या^{२} अ) कोछे^{२} अ = १

$$\text{वा प} = \left(\frac{१}{१} - \frac{\text{आधार}^२}{\text{कर्ण}^२}\right) \times \frac{\text{कर्ण}^२}{\text{लम्ब}^२}$$

$$= \left(\frac{\text{कर्ण}^२ - \text{आधार}^२}{\text{कर्ण}^२}\right) \times \frac{\text{कर्ण}^२}{\text{लम्ब}^२}$$

$$= \frac{\text{लम्ब}^२}{\text{कर्ण}^२} \times \frac{\text{कर्ण}^२}{\text{लम्ब}^२} = १ \text{ उपपन्नम्।}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

अथवा वा. प = (१ – कोज्या² अ) कोछे² अ

= ज्या² अ × को छे² अ

$$= \frac{१}{\text{को छे}^२ \text{ अ}} \times \text{को छे}^२ \text{ अ} = १$$ उपपन्नम्।

(३) कोस्प² अ (१ – कोज्या² अ) = कोज्या² अ

वा. प = कोस्प² अ (१ – कोज्या² अ)

= कोस्प² अ × ज्या² अ

$$= \frac{\text{कोज्या}^२ \text{ अ}}{\text{ज्या}^२ \text{ अ}} \times \text{ज्या}^२ \text{ अ} = \text{कोज्या}^२ \text{ अ}$$

अत उपपन्नम्।

(४) ज्या अ छे अ $\sqrt{\text{को छे}^२ \text{ अ} - १} = १$

वा. प = ज्या अ छे अ $\sqrt{\text{को छे}^२ \text{ अ} - १}$

$$= \text{ज्या अ} \times \frac{१}{\text{कोज्या अ}} \times \text{कोस्प अ}$$

$$= \text{ज्या अ} \times \frac{१}{\text{कोज्या अ}} \times \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}}$$

= १, अत उपपन्नम्।

(५) कोज्या अ $\sqrt{\text{कोस्प}^२ \text{ अ} + १} = \sqrt{\text{कोछे}^२ \text{ अ} - १}$

वा.प = कोज्या अ $\sqrt{\text{कोस्प}^२ \text{ अ} + १}$

= कोज्या अ × कोछे अ

$$= \text{कोज्या अ} \times \frac{१}{\text{ज्या अ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} = \text{कोस्प अ} = \sqrt{\text{कोछे}^२ \text{ अ} - १}$$

अत उपपन्नम्।

(६) ज्या² अ कोस्प² अ + ज्या² अ = १

वा.प = ज्या² अ कोस्प² अ + ज्या² अ

$$= \text{ज्या}^२ \text{ अ} \times \frac{\text{कोज्या}^२\text{अ}}{\text{ज्या}^२ \text{ अ}} + \text{ज्या}^२ \text{ अ}$$

= कोज्या² अ + ज्या² अ = १. उपपन्नम्।

(७) (१ + स्प² अ) (१ – ज्या² अ) = १

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

वा.प $= (१ + स्प^२ अ) (१ - ज्या^२ अ)$

$= छे^२ अ \times कोज्या^२ अ$

$= \frac{१}{कोज्या^२ अ} \times कोज्या^२ अ = १,$ अत उपपन्नम्।

(८) $छे^४ अ - १ = २ स्प^२ अ + स्प^४ अ$

वा.प $= छे^४ अ - १$

$= (छे^२) - (१)^२$

$= (१ + स्प ^२)^२ - (१)^२$

$= १ + २ स्प^२ अ + स्प^४ अ - १$

$= २ स्प^२ + स्प^४ अ$, अत उपपन्नम्।

(९) $(स्प अ को छे अ)^२ - (ज्या अ छे अ)^२ = १$

वा.प $= (स्प अ को छे अ)^२ - (ज्या अ छे अ)^२$

$$= \left(\frac{ज्या अ}{कोज्या अ} \times \frac{१}{ज्याअ}\right)^२ - \left(ज्या अ \times \frac{१}{कोज्याअ}\right)^२$$

$$= \frac{१}{कोज्या^२ अ} - स्प^२ अ = छे^२ अ - स्प^२ अ$$

$= १ + स्प^२अ - स्प^२अ = १$ उपपन्नम्।

(१०) $(छे अ को स्प अ)^२ - (कोज्या अ को छे अ)^२ = १$

वा.प $= (छे अ कोस्प अ)^२ - (कोज्या अ को छे अ)^२$

$$= \frac{१}{कोज्या अ} \times \frac{कोज्या अ}{ज्या अ} - कोज्या अ \times \frac{१}{ज्या अ}$$

$$= \frac{१}{ज्या^२ अ} - \frac{कोज्या^२ अ}{ज्या^२ अ} = कोछे^२ अ - कोस्प^२ अ$$

$= १ + कोस्प^२ अ - कोस्प^२ अ = १$, उपपन्नम्।

(११) $स्प^२ अ - कोस्प^२ अ = छे^२ अ - कोछे^२ अ$

वा.प $= स्प^२ अ - कोस्प^२ अ$

$$= \frac{ज्या^२ अ}{कोज्या^२ अ} - \frac{कोज्या^२ अ}{ज्या^२ अ}$$

$$= \frac{ज्या^४ अ - कोज्या^४ अ}{ज्या^२ अ . कोज्या^२ अ}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$= \frac{(\text{ज्या}^2 \text{ अ} + \text{कोज्या}^2 \text{ अ}) (\text{ज्या}^2 \text{ अ} - \text{कोज्या}^2 \text{ अ})}{\text{ज्या}^2 \text{ अ कोज्या}^2 \text{ अ}}$$

$$= \frac{\text{ज्या}^2 \text{ अ} - \text{कोज्या}^2 \text{ अ}}{\text{ज्या}^2 \text{ अ कोज्या}^2 \text{ अ}}$$

$$= \frac{१}{\text{कोज्या}^2 \text{ अ}} - \frac{१}{\text{ज्या}^2 \text{ अ}}$$

$= \text{छे}^2 \text{ अ} - \text{कोछे}^2 \text{ अ}$ उपपन्नम्।

।।इति।।

उ (१) $\text{छे}^2 \text{ आ} + \text{कोछे}^2 \text{ आ} = \text{छे}^2 \text{ आ कोछे}^2 \text{ आ}$ इति साध्यताम्

अत्र प्रथमः पक्षः $= \frac{१}{\text{कोज्या}^2\text{आ}} + \frac{१}{\text{ज्या}^2\text{आ}} = \frac{\text{ज्या}^2 \text{ आ} + \text{कोज्या}^2\text{आ}}{\text{कोज्या}^2\text{आ ज्या}^2\text{आ}}$

$$= \frac{१}{\text{कोज्या}^2\text{आ ज्या}^2\text{आ}} = \text{छे}^2 \text{ आ कोछे}^2\text{आ}$$

उ (२) $\text{ज्या}^2 \text{ आ स्पआ} + \text{कोज्या}^2 \text{ आ कोस्प आ} + २\text{ज्याअ कोज्या आ} =$

$\text{स्पआ} + \text{कोस्पआ}$ इति साध्यताम्

प्रथम् पक्षः $= \text{ज्या}^2 \text{ आ} \frac{\text{ज्याआ}}{\text{कोज्याआ}} + \text{कोज्या}^2 \text{ आ} \frac{\text{कोज्याआ}}{\text{ज्याआ}}$

$$+ २ \text{ ज्याआ कोज्याआ} = \frac{\text{ज्या}^4 \text{ आ} + \text{कोज्या}^4 \text{ आ} + २ \text{ ज्या}^2 \text{ आ कोज्या}^2 \text{ आ}}{\text{ज्याआ कोज्याआ}}$$

$$= \frac{(\text{ज्या}^2 \text{ आ} + \text{कोज्या}^2 \text{ आ})^2}{\text{ज्याआ कोज्याआ}} = \frac{१}{\text{ज्याआ कोज्याआ}}$$

$$= \frac{\text{ज्या}^2\text{आ} + \text{कोज्या}^2\text{आ}}{\text{ज्याआ कोज्याआ}} = \frac{\text{ज्याआ}}{\text{कोज्याआ}} + \frac{\text{कोज्याआ}}{\text{ज्याआ}} = \text{स्पआ} + \text{कोस्पआ}$$

यद्वा द्वितीयः पक्षः $= \frac{\text{ज्याआ}}{\text{कोज्याआ}} + \frac{\text{कोज्याआ}}{\text{ज्याआ}}$

$$= \frac{\text{ज्या}^2\text{आ} + \text{कोज्या}^2\text{आ}}{\text{कोज्याआ ज्याआ}} = \frac{१}{\text{कोज्याआ ज्याआ}}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$\therefore$ पक्षौ तुल्यौ $= \dfrac{१}{\text{ज्याआ कोज्याआ}}$

उ (३) $\dfrac{\text{स्पअ}-\text{कोस्पव}}{\text{स्पव}-\text{कोस्पअ}} =$ स्पअ कोस्पव इति साध्यताम्

$$\text{प्रथमः पक्षः} = \dfrac{\text{स्पअ}-\text{कोस्पव}}{\dfrac{१}{\text{कोस्पव}} - \dfrac{१}{\text{स्पअ}}} = \dfrac{\text{स्पअ}-\text{कोस्पव}}{\dfrac{\text{स्पअ}-\text{कोस्पव}}{\text{स्पअ कोस्पव}}}$$

$$= \dfrac{\text{स्पअ कोस्पव}}{१} \times \dfrac{\text{स्पअ कोस्पव}}{\text{स्पअ}-\text{कोस्पव}} = \text{स्पअ कोस्पव}$$

(२) अभ्यासार्थ प्रश्नाः

१. १–उज्याअ = ज्याअ कोस्पअ

२. उज्याअ छेअ = छेअ–१

३. स्पअ + कोस्पअ = छेअ कोछेअ

४. (कोज्याअ + ज्याअ)^{२} + (कोज्याअ– ज्याअ)^{२} = २

५. ज्या^{२} अ (१ + कोस्प^{२}अ) + कोज्या^{२} अ (१ + स्प^{२}अ) = २

६. (छेअ + कोछेअ) (ज्याअ + कोज्याअ) = छेअ कोछेअ + २

७. (१ + कोस्पअ + कोछेअ) (१ + कोस्पअ–कोछेअ) = २ कोस्पअ

८. (ज्याअ + कोछेअ)^{२} + (कोज्याअ+छेअ)^{२}=स्प^{२}अ+कोस्प^{२}अ+ ७

९. ज्याअ (१ + स्पअ) + कोज्याअ (१ + कोस्पअ) = छेअ +कोछेअ

१०. कोस्पअ स्पव (स्पअ + कोस्पव) = कोस्पअ + स्पव

११. २ छे^{२} अ–छे^{४} अ–२ कोछे^{२} अ + कोछे^{४} अ = कोस्प^{४} अ–स्प^{४} अ

१२. (१ + कोस्पअ + स्पअ) (ज्याअ–कोज्याअ) =

$$\dfrac{\text{छेअ}}{\text{कोछे}^{२}\text{अ}} - \dfrac{\text{कोछेअ}}{\text{छे}^{२}\text{अ}}$$

१३. २ उज्याअ + कोज्या^{२} अ = १ + उ ज्या^{२} अ

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(२) अभ्यासार्थ प्रश्नाः साध्यन्ते–

शालिनी–(१) १ - उज्या अ = ज्या अ कोस्प अ

वा.प = १ - उज्या अ

= १ - (१ - कोज्या अ) = १ - १ + कोज्या अ

$$= \text{कोज्या अ} = \frac{\text{कोज्या अ ज्या अ}}{\text{ज्या अ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} \times \text{ज्या अ}$$

= ज्या अ कोस्प अ, अत उपपन्नम्।

(२) उज्या अ छे अ = छे अ - १

वा. प = उज्या अ छे अ

= (१ - कोज्या अ) छे अ

= छे अ - कोज्या अ छेअ

= छे अ - १, अत उपपन्नम्।

(३) स्पअ + कोस्प अ = छे अ को छे अ

वा. प = स्प अ + कोस्प अ

$$= \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} + \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} = \frac{\text{ज्या}^2 \text{ अ} + \text{कोज्या}^2 \text{ अ}}{\text{ज्या अ . कोज्या अ}}$$

$$= \frac{१}{\text{ज्या अ. कोज्या अ}} = \frac{१}{\text{कोज्या अ}} \times \frac{१}{\text{ज्या अ}}$$

= छे अ कोछे अ, अत उपपन्नम्।

(४) (कोज्या अ + ज्या अ)^२ + (कोज्या अ - ज्या अ)^२ = २

वा.प = (कोज्या अ + ज्या अ)^२ + (कोज्या अ - ज्याअ)^२

= कोज्या अ + ज्या अ + २ कोज्या अ ज्याअ + कोज्या^{२} अ

+ ज्या^{२} अ - २ कोज्या अ ज्या अ

= २ ज्या^{२} अ + २ कोज्या^{२} अ

= २ (ज्या^{२} अ + कोज्या^{२} अ)

= २ x १ = २. उपपन्नम्।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(५) ज्या^{२} अ (१ + कोस्प^{२}अ) + कोज्या^{२} अ (१ + स्प^२ अ) = २

वा.प $=$ ज्या^{२} अ (१ + कोस्प^२ अ) + कोज्या^{२} अ (१ + स्प^२ अ)

$=$ ज्या^{२} अ को छे^{२} अ + कोज्या^{२} अ छे^{२} अ

$$= \text{ज्या}^{२}\text{ अ} \times \frac{१}{\text{ज्या}^{२}\text{अ}} + \text{कोज्या}^{२}\text{ अ} \times \frac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}$$

$=$ १ + १ = २, उपपन्नम्।

(६) (छे अ + कोछेअ) (ज्या अ + कोज्या अ) = छे अ कोछे अ +२

वा.प $=$ (छे अ + को छे अ) (ज्या अ + कोज्या अ)

$$= \left(\frac{१}{\text{कोज्या अ}} + \frac{१}{\text{ज्याअ}}\right)(\text{ज्या अ} + \text{कोज्या अ})$$

$$= \left(\frac{\text{ज्या अ} + \text{कोज्या अ}}{\text{कोज्याअ ज्याअ}}\right) \times (\text{ज्याअ} + \text{कोज्याअ})$$

$$= \frac{\circ\ (\text{ज्या अ} + \text{कोज्या अ})^{२}}{\text{कोज्या अ ज्या अ}}$$

$$= \frac{\text{ज्या}^{२}\text{ अ} + \text{कोज्या}^{२}\text{ अ} + २\text{ ज्या अ कोज्या अ}}{\text{कोज्या अ ज्या अ}}$$

$$= \frac{१ + २\text{ ज्याअ कोज्या अ}}{\text{कोज्या अ ज्या अ}}$$

$$= \frac{१}{\text{कोज्या अ ज्या अ}} + \frac{२\text{ ज्या अ कोज्या अ}}{\text{कोज्या अ ज्या अ}}$$

$$= \frac{१}{\text{कोज्या अ}} \times \frac{१}{\text{ज्या अ}} = २$$

$=$ छे अ को छे अ + २ उपपन्नम्।

(७) (१ +कोस्प अ+कोछे अ) (१ + कोस्प अ-कोछे अ)=२ कोस्प अ

वा. प = (१ + कोस्प अ + कोछे अ) (१ +कोस्प अ-कोछेअ)

$=$ (१ + कोस्प अ)^२ – को छे^{२} अ

$=$ १ + कोस्प^२ अ + २ कोस्प अ – को छे^{२} अ

$=$ को छे^{२} अ + २ कोस्प अ – को छे^{२} अ

$=$ २ कोस्प अ, उपपन्नम्।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(८) $(\text{ज्या अ} + \text{को छे अ})^2 + (\text{कोज्या अ} + \text{छेअ})^2 = \text{स्प}^2\text{अ} + \text{कोस्प}^2\text{अ} + ७$

$$\text{वा. प} = (\text{ज्या अ} + \text{को छे अ})^2 + (\text{कोज्या अ} + \text{छेअ})^2$$

$$= \text{ज्या}^2 \text{ अ} + \text{को छे}^2 \text{ अ} + २ \text{ ज्या अ को छे अ} + \text{कोज्या}^2 \text{ अ} + \text{छे}^2 \text{ अ} + २ \text{ कोज्या अ छे अ}$$

$$= \text{ज्या}^2 \text{ अ} + \text{कोज्या}^2 \text{ अ} + २ \text{ ज्या अ कोछे अ} + \text{कोछे}^2 \text{ अ} + \text{छे}^2 \text{ अ} + २ \text{ कोज्या अ छे अ}$$

$$= १ + २ + २ + \text{को छे}^2 \text{ अ} + \text{छे}^2 \text{ अ}$$

$$= ५ + \text{को छे}^2 \text{ अ} + \text{छे}^2 \text{ अ}$$

$$= ५ + १ + \text{कोस्प}^2 \text{ अ} + १ + \text{स्प}^2 \text{ अ}$$

$$= \text{कोस्प}^2 \text{ अ} + \text{स्प}^2 \text{ अ} + ७ \text{ उपपन्नम्।}$$

(९) ज्याअ (१ + स्प अ) + कोज्याअ (१ + कोस्पअ) छे अ + को छे अ

$$\text{वा. प} = \text{ज्या अ} (१ + \text{स्पअ}) + \text{कोज्या अ} (१ + \text{कोस्प अ})$$

$$= \text{ज्या अ} + १ \left(\frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} \right) + \text{कोज्या अ} \left(१ + \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} \right)$$

$$= \text{ज्या अ} \left(\frac{\text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} \right) + \text{कोज्याअ} \left(\frac{\text{ज्या अ} + \text{कोज्याअ}}{\text{ज्या अ}} \right)$$

$$= \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} (\text{कोज्या अ} + \text{ज्याअ}) + \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} (\text{ज्याअ} + \text{कोज्या अ})$$

$$= \text{स्प अ} (\text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ}) + \text{कोस्प अ} (\text{ज्या अ} + \text{कोज्या अ})$$

$$= (\text{कोज्याअ} + \text{ज्याअ}) (\text{स्पअ} + \text{कोस्प अ})$$

$$= (\text{कोज्या अ} + \text{ज्याअ}) \left(\frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} + \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} \right)$$

$$= (\text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ}) \frac{\text{ज्या}^2\text{अ} + \text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्या अ ज्या अ}}$$

$$= (\text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ}) \times \frac{१}{\text{कोज्या अ. ज्या अ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{कोज्या अ ज्या अ}} + \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्या अ ज्या अ}}$$

$$= \frac{१}{\text{ज्या अ}} + \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \text{को छे अ} + \text{छे अ} \text{, उपपन्नम्।}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(१०) कोस्प अ स्पअ (स्प अ + कोस्प अ) = को स्प अ + स्प अ

वा.प = को स्प अ स्प अ (स्प अ + कोस्प अ)

= कोस्प अ स्प^{२} अ + कोस्प^{२} अ स्प अ

$$= \frac{१}{\text{स्प अ}} \times \text{स्प}^{२} \text{ अ} + \text{कोस्प}^{२} \text{ अ } \frac{१}{\text{कोस्प अ}}$$

= स्प अ + कोस्प अ, अत उपपन्नम्।

(११) २ छे^{२} अ– छे^{४} अ –२ कोछे^{२} अ + कोछे^{४} अ = कोस्प^{४} अ – स्प^{४} अ

वा.प = २ छे^{२} अ – छे^{४} अ – २ को छे^{२} अ + को छे^{४} अ

= २ (१ + स्प^{२} अ) – (१ + स्प^{२} अ)^{२} – २ (१ – कोस्प^{२} अ)

+ (१ + कोस्प^{२} अ)^{२}

= २ + २ स्प^{२} अ – (१ + स्प^{४} अ + २ स्प^{२}अ)–२-२कोस्प^{२}अ

+ १ + कोस्प^{४} अ + २ कोस्प^{२} अ

= २+२ स्प^{२}अ – १ – स्प^{४}अ – २ स्प^{२} अ – २ – २ कोस्प^{२}अ

+ १ कोस्प^{४} अ + २ कोस्प^{२} अ

= कोस्प^{४} अ – स्प^{४} अ, अत उपपन्नम्।

(१२) (१ + कोस्प अ + स्पअ) (ज्या अ – कोज्या अ) =

$$\frac{\text{छे अ}}{\text{को छे}^{२} \text{ अ}} - \frac{\text{को छे अ}}{\text{छे}^{२} \text{ अ}}$$

वा.प = (१ + कोस्प अ + स्प अ) (ज्याअ – कोज्या अ)

= ज्याअ – कोज्या अ + ज्या अ. कोस्प अ –

कोस्प अ. कोज्या अ + स्प अ. ज्याअ – कोज्या अ. स्प अ.

$$= \text{ज्या अ} - \text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ} \times \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} - \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} \times$$

$$\text{कोज्या अ} + \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} \times \text{ज्या अ} - \text{कोज्या अ} \times \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}}$$

$$= \frac{\text{ज्या}^{२} \text{ अ}}{\text{कोज्या अ}} \times \frac{\text{कोज्या}^{२} \text{ अ}}{\text{ज्या अ}}$$

$$= \text{ज्या}^{२} \text{ अ} \times \frac{१}{\text{कोज्या अ}} - \text{कोज्या}^{२} \text{ अ} \times \frac{१}{\text{ज्या अ}}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$= \frac{१}{\text{कोज्याअ}} \times \frac{१}{\text{कोछे}^{२}\ \text{अ}} - \frac{१}{\text{ज्याअ}} \times \frac{१}{\text{छे}^{२}\ \text{अ}}$$

$$= \frac{\text{छे अ}}{\text{को छे}^{२}\ \text{अ}} - \frac{\text{कोछेअ}}{\text{छे}^{२}\ \text{अ,}}$$ इत्युपपन्नम्।

(१३) २ उज्याअ + कोज्या^{२} अ = १ + उज्या^{२} अ

वा.प = २ उज्या अ + कोज्या^{२} अ

= २ (१ − कोज्याअ) + कोज्या^{२} अ

= २ − २ कोज्या अ + कोज्या^{२} अ

= १ + १ − २ कोज्या अ + कोज्या^{२} अ

= १ + (१ − कोज्या अ)^{२}

= १ + उज्या^{२} अ उपपन्नम्। ।।इति।।

❑

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

द्वितीयाध्यायः

९ प्र०-रेखागणिते समकोणसम्बन्धेन कोणो माप्यन्ते किन्त्वत्र त्रिकोणमितौ तादृशं मापनमसुविधाजनकम्।

त्रिकोणमितौ कोणमापनप्रकारस्त्रिधास्ति।

(१) षष्टि विभागात्मकः (२) शतविभागात्मकः (३) व्यासार्धिककोणपरः।

तत्र **प्रथमं** समकोणस्य नवति ९० तुल्यं विभागं कृत्वा ते विभागा अंशाख्यया व्यवह्रियन्ते। एवं प्रत्येकस्यांशस्य ६० षष्टि तुल्या विभागाः कला संज्ञया तथा प्रत्येककलायाः षष्टि तुल्या विभागाः विकलासंज्ञया व्यवह्रियन्ते। अंशकलाविकलानां द्योतकचिह्नानि ०,।,।। यथा १°, १′, १″

एभिरेकोंऽशः, एका कला, एका विकला च व्याख्यायते।

अतः षष्टि विकलाः (६०″) = एककला (१′)

षष्टि कलाः (६०′) = एकोंऽशः (१°)

नवत्यंशाः (९०°) = एकः समकोणः

इयं रीतिः सर्वत्र प्रसिद्धा त्रिकोणमितौ व्यवहृता च परञ्च न तथा सौलभ्यदायिनी यतोऽत्र गुणकाः ६०, तथा ९०।

१० प्र०-द्वितीया रीतिस्तु शतविभागात्मिका। एषा फ्रेञ्चरीतिः। अत्र समकोणस्य तुल्यं शतभागं कृत्वा प्रत्येकभागो ग्रेडसंज्ञया कथ्यते एवं ग्रेडस्य शतांशः मिनट संज्ञया तथा मिनटस्य शतांशः सेकेण्ड संज्ञया कथ्यते।

१ ग्रे, १′, १″, एभिरेको ग्रेडः, एको मिनटः, एकः सेकेण्ड इति द्योतितो भवति। अतः १०० से = १ मिनट

१०० मि = १ ग्रेड

१०० ग्रे = एकः समकोणः

पूर्वरीत्यपेक्षया एषा रीतिः सौलभ्यदायिनी परन्तु कार्यक्षेत्रे प्रथमरीतेः परिवर्त्तने सारिण्यादौ महत्परिवर्त्तनं विलोक्य एषा रीतिर्जिहासितैवावलोक्यते कदाचिदपि व्यवहारे अस्या आदरो न जातः।

षष्टि विभागीयरीतेः शतविभागे परिवर्त्तनं यथा।

यतः समकोणः नवत्यंशानां शतग्रेडानां च तुल्यस्तेन-

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$९०° = १०० \text{ ग्रे } \therefore १° = \frac{१० \text{ ग्रे}}{९}, \text{ तथा } १ \text{ ग्रे} = \frac{९°}{१०}$$

अतोंऽशान् ग्रेडे परिवर्त्तयितुं स्वनवभोभागस्तत्र योज्यस्तथा ग्रेडानंशे पारिवर्त्तयितुं स्वदशमो भागस्तस्मादपनेय इति।

$$३६° = (३६ + \frac{१}{९} \times ३६)^{\text{ग्रे}} = ४०^{\text{ग्रे}}$$

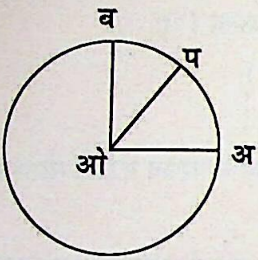
$$६४^{\text{ग्रे}} = (६४ - \frac{१}{१०} \times ६४)° = (६४ - ६.४)° = ५७.६°$$

यदि कोणमाने पूर्णसंख्या न भवति तदा प्रथममंशानां भिन्नाङ्के परिवर्त्तनं समुचितम्।

वृत्तीयगणना।

११ प्र०-

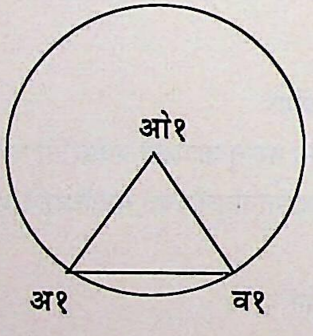
कोणमापनस्य **तृतीया रीतिरेषा** या च गणितस्योच्चविभागे व्यवहृता।

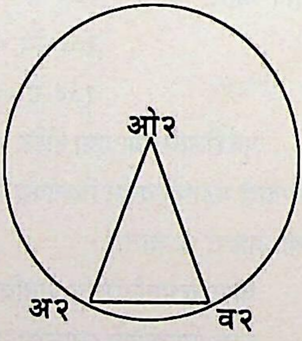


कल्प्यतां अपव वृत्तक्षेत्रं यस्य केन्द्रं ओ, कस्माच्चन अ विन्दोः अप चापं वृत्तव्यासार्धतुल्यं मापनीयं, ओअ, ओप रेखे कार्ये।

अओप कोणस्तादृशः येन परिमाणेन वृत्तीयगणना क्रियते। एषः कोणः व्यासार्धिक कोणनाम्ना गृह्यते अस्य स्वरूपञ्च १क

कस्यापि वस्तुनो विभागाय परिमाणकल्पनायामिदमावश्यकं यत् परिमाणे नित्यत्वं तिष्ठेत तेन व्यासार्धिककोणे नित्यत्वसमर्थनमुचितम् यच्चाग्रे प्रदर्शितं भवति।





RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

वृत्तपरिधेर्वृत्तव्यासार्धस्य च सम्बन्धः सदा स्थिरः। कल्प्यते वृत्तद्वयं ययोर्व्यासार्धे $र_१$ $र_२$ तथा प्रत्येकस्मिन् वृत्ते न भुजपरिमितस्य समभुजक्षेत्रं कल्पनीयम्।

अतोऽत्र वृत्तद्वयं समद्विबाहुकं त्रिभुजद्वयं ययोः शीर्षकोणः =

$\frac{१}{न}$ ४ स को अतस्त्रिभुजे सजातीये ते (रे ६।४) $\frac{अ_१ व_१}{ओ_१ अ_१} = \frac{अ_२ व_२}{ओ_२ अ_२}$

$$\text{अर्थात्} \quad \frac{अ_१ ब_१}{र_१} = \frac{अ_२ व_२}{र_२}$$

$$\therefore \quad \frac{न\, अ_१ व_१}{र_१} = \frac{न\, अ_२ व_२}{र_२} \quad \text{अर्थात्} \quad \frac{प_२}{र_१} = \frac{प_२}{र_२}$$

अत्र $प_१$ $प_२$ वृत्तयोरन्तर्गतयोर्बहुभुजक्षेत्रयोर्भुजानां योगः। यदि न भुज-संख्याया अधिकत्वं कल्प्यते तदा बहुभुजानां योगे परिधौ चान्तरं स्वल्पतमम्।

$$\text{अतोऽन्त्ये} \quad \frac{परिधि_१}{र_१} = \frac{परिधि_२}{र_२} = \frac{प_१}{२ र_१} = \frac{प_२}{२ र_२}$$

$$\text{अतः} \quad \frac{परिधि_१}{व्या_१} = \frac{परिधि_२}{व्या_२} \text{ इत्युपपन्नम्}$$

एवमत्र कस्यचिद्वृत्तस्य व्यासेन तद्वृत्तपरिधिमापनं निरवच्छिन्नरूपेण न भवति तेनैष सम्बन्धः ग (ग्रीक पाइ वर्णेन) स्थाप्यते।

$$\text{अतो दशमलवमानेन} \quad \frac{परिधि}{व्यास} = ३.१४१५९२६५३६$$

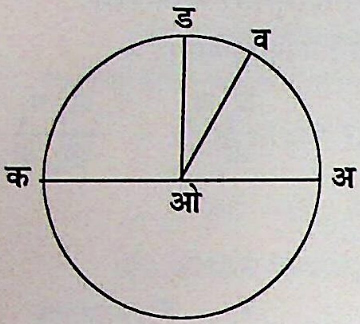
$$\text{कार्यार्थमेष सम्बन्धः} \frac{३९२७}{१२५०} \text{ यद्वा स्थूलरूपेण } \frac{२२}{७} \text{ स्वीक्रियते।}$$

$$\text{यतः} \frac{परिधि}{व्या} = ग, \therefore \frac{परिधि}{२ र} = ग, \therefore प = २ गर$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

सर्वे व्यासार्धिककोणास्तुल्याः।



कल्पतां अवड किञ्चिद्वृत्तं, यस्य केन्द्रं ओ तथा ओअ व्यासार्धम्। ओव योज्यं तदा ∠ अओव व्यासार्धिककोणः। अओ रेखा क चिह्नपर्यन्तं वर्धनीया तदा (रे ६।३३)

$$\frac{\angle \text{अओव}}{\text{१ समकोण}} = \frac{\text{अवचाप}}{\text{अवकचाप}}$$

$$= \frac{\frac{\text{१}}{\text{२}}\text{व्या}}{\text{परिध्यर्ध}} = \frac{\text{र}}{\text{गर}} = \frac{\text{१}}{\text{ग}}$$ इदं मानं सर्वदा स्थिरम्।

कल्पतां अओड समकोणः तदा

$$\frac{\angle \text{अओड}}{\angle \text{अओव}} = \frac{\text{अडचाप}}{\text{अवचाप}} = \frac{\frac{\text{१}}{\text{४}}\text{परिधि}}{\frac{\text{१}}{\text{२}}\text{व्या}} = \frac{\frac{\text{१}}{\text{४}}(\text{२ गर})}{\text{र}} = \frac{\text{ग}}{\text{२}}$$

अर्थात् समकोणे $\frac{\text{ग}}{\text{२}}$ व्यासार्धिककोणोऽस्ति।

अनेन सिद्धान्तेन ग व्यासार्धिककोणः = २ समकोणः = १८०°

$\therefore$ एकव्यासार्धिकोणः = $\frac{\text{१८०}}{\text{ग}}$ अंशाः

भजनेन $\frac{\text{१}}{\text{ग}}$ =.३१८३१ संभवतः।

$\therefore$ संभवतः एकव्यासार्धिककोणः = १८० x.३१८३१ = ५७.२९५८

❑

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

तृतीयाध्यायः

त्रैकोणमितिकसम्बन्धमानस्यावधिः।

१२ प्र०-पूर्वयुक्तया ज्या^{2}अ + कोज्या^{2}अ = १

अत्र ज्या^{2}अ, कोज्या^{2}अ धनात्मिके वर्गत्वात् परन्तु यतो द्वयोर्योगो रूपतुल्यस्तेन नैको रूपाधिकः। यद्येकस्य रूपाधिकत्वं कल्प्यते तदान्यस्य मानं ऋणात्मकं यन्न समुचितं वर्गस्य धनत्वात्। अतो ज्या कोटिज्या वा संख्यया न रूपाधिका।

शालिनी-यहाँ ज्या^{2} अ, कोज्या^{2} अ वर्ग होने के कारण धनात्मक है। लेकिन दोनों के योग एक (१) है न कि एक से अधिक। यदि एक से अधिक की कल्पना करते हैं तब दूसरे का मान ऋणात्मक होगा लेकिन ऐसा नहीं हो सकता क्योंकि वर्ग धनात्मक हैं।

यतः ज्याअ रूपाल्पा तेन कोछेअ रूपाधिकम् यतः

कोछेअ = $\frac{१}{\text{ज्याअ}}$ एवं यतः कोज्याअ रूपाल्पा तेन छेअ रूपादिकम् यतः

छेअ = $\frac{१}{\text{कोज्याअ}}$

अत्रान्यापि युक्तिः।

कर्णरेखया विभक्ता लम्बरेखा कोणज्या तत्र लम्बस्य कर्णाल्पत्वात् ज्या सर्वदा रूपाल्पा एवं कर्णरेखया विभक्तः आधारः कोटिज्या आधारस्यापि कर्णाल्पत्वात् कोटिज्यापि सर्वदा रूपाल्पैव।

कस्यापिकोणस्य त्रैकोणमितिकसम्बन्धाः यस्मिन्कस्मिन्नपि ज्यादिरूपे प्रदर्शिता भवन्ति यथात्र ज्यारूपे परिणतास्सर्वे सम्बन्धाः प्रदर्श्यन्ते।

शालिनी-किसी भी कोण का त्रिकोणमितीय सम्बन्ध जिस-किसी में भी ज्या आदि रूपों में प्रदर्शित किया जा सकता है (या, होता है)। यहाँ ज्या रूप में सभी सम्बन्धों को परिणत किया जा रहा है-

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

यतः ज्या^{२}अ + कोज्या^{२}अ = १ $\therefore$ कोज्या अ = $\sqrt{१ - ज्या^२अ}$

$$\text{एवं स्पअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{ज्याअ}}{\sqrt{१\text{-ज्या}^२\text{अ}}} \quad \text{कोस्पअ} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$

$$= \frac{\sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{अ}}}{\text{ज्याअ}}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} \quad \text{छेअ} = \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = \frac{१}{\sqrt{१-\text{ज्या}^२\text{अ}}}$$

एवं स्पर्शरेखारूपे परिणतास्सर्वे संबन्धाः प्रदर्श्यन्ते

शालिनी—इसी प्रकार यहाँ स्पर्श रेखा रूप में सभी सम्बन्धों को परिणत किया जा रहा हैं।

$$\text{कोस्प अ} = \frac{१}{\text{स्पअ}} \quad \text{छेअ} = \sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{अ}}$$

$$\text{कोज्याअ} = \frac{१}{\text{छेअ}} = \frac{१}{\sqrt{१+\text{स्प}^२\text{अ}}}$$

$$\text{ज्याअ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \text{ कोज्याअ=स्पअकोज्याअ=} \frac{\text{स्पअ}}{\sqrt{१+\text{स्प}^२\text{अ}}}$$

$$\text{कोछेअ} = \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \frac{\sqrt{१+\text{स्प}^२\text{अ}}}{\text{स्पअ}}$$

उ (१) यदि कोज्याआ = $\frac{५}{१३}$ तदा कोछेअ तथा कोस्पअ माने के?

$$\text{कोछेअ} = \frac{१}{\text{ज्याआ}} = \frac{१}{\sqrt{१\text{-कोज्या}^२\text{आ}}} = \frac{१}{\sqrt{१-\left(\frac{५}{१३}\right)^२}}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{१- \frac{२५}{१६९}}} = \frac{१}{\sqrt{\frac{१४४}{१६९}}} = \frac{१}{\frac{१२}{१३}} = \frac{१३}{१२}$$

$$\text{कोस्पअ} = \frac{\text{कोज्याआ}}{\text{ज्याआ}} = \text{कोज्याआ कोछेआ} = \frac{५}{१३} \times \frac{१३}{१२} = \frac{५}{१२}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

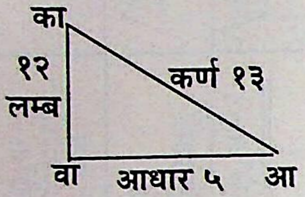
कस्यापि कोणस्य त्रैकोणमितिकसम्बन्धाः यस्मिन्कस्मिन्नपि ज्यादिरूपे प्रदर्शिता भवन्ति यथा ज्यादिरूपे परिणतास्सर्वे सम्बन्धाः प्रदर्श्यन्ते।

	ज्याअ	कोज्या अ	स्पअ	कोस्पअ	छेअ	कोछेअ
ज्याअ	ज्या अ	$\frac{\ }{\sqrt{१-\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}}$	$\frac{\text{स्पअ}}{\sqrt{१+\text{स्प}^{२}\text{अ}}}$	$\frac{१}{\sqrt{१+\text{कोस्प}^{२}\text{अ}}}$	$\frac{\sqrt{\text{छे}^{२}\text{अ}-१}}{\text{छेअ}}$	$\frac{१}{\text{कोछेअ}}$
कोज्याअ	$\frac{\ }{\sqrt{१-\text{ज्या}^{२}\text{अ}}}$	कोज्या अ	$\frac{१}{\sqrt{१+\text{स्प}^{२}\text{अ}}}$	$\frac{\text{कोस्पअ}}{\sqrt{१+\text{कोस्प}^{२}\text{अ}}}$	$\frac{१}{\text{छेअ}}$	$\frac{\sqrt{\text{कोछे}^{२}\text{अ}-१}}{\text{कोछेअ}}$
स्पअ	$\frac{\text{ज्या अ}}{\sqrt{१-\text{ज्या}^{२}\text{अ}}}$	$\frac{\sqrt{१-\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}}{\text{कोज्याअ}}$	स्पअ	$\frac{१}{\text{कोस्पअ}}$	$\frac{\ }{\sqrt{\text{छे}^{२}\text{अ}-१}}$	$\frac{१}{\sqrt{\text{कोछे}^{२}\text{अ}-१}}$
कोस्पअ	$\frac{\sqrt{१-\text{ज्या}^{२}\text{अ}}}{\text{ज्या अ}}$	$\frac{\text{कोज्या अ}}{\sqrt{१-\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}}$	$\frac{१}{\text{स्पअ}}$	कोस्प अ	$\frac{१}{\sqrt{\text{छे}^{२}\text{अ}-१}}$	$\sqrt{\text{कोछेअ}^{२}-१}$
छेअ	$\frac{१}{\sqrt{१-\text{ज्या}^{२}\text{अ}}}$	$\frac{१}{\text{कोज्या अ}}$	$\sqrt{१+\text{स्प}^{२}\text{अ}}$	$\frac{\sqrt{१+\text{कोस्प}^{२}\text{अ}}}{\text{कोस्पअ}}$	छेअ	$\frac{\text{कोछेअ}}{\sqrt{\text{कोछे}^{२}\text{अ}-१}}$
कोछेअ	$\frac{१}{\text{ज्याअ}}$	$\frac{१}{\sqrt{१-\text{कोज्या}^{२}\text{अ}}}$	$\frac{\sqrt{१+\text{स्प}^{२}\text{अ}}}{\text{स्पअ}}$	$\sqrt{१+\text{कोस्प}^{२}\text{अ}}$	$\frac{\text{छेअ}}{\sqrt{\text{छे}^{२}\text{अ}-१}}$	कोछेअ

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

शालिनी-यदि कोज्या आ = $\frac{५}{१३}$ तो को छे आ तथा कोस्प आ का मान क्या? उपरिलिखित प्रस्तुत प्रक्रिया से भिन्न प्रक्रिया द्वारा भी इस का मान लाया जा सकता है। यथा—



$$कोज्याआ = \frac{५}{१३} = \frac{आधार}{कर्ण}$$

$$\therefore लम्ब = \sqrt{कर्ण^२ - आधार^२} = \sqrt{१३^२ - ५^२}$$

$$= \sqrt{१६९ - २५} = \sqrt{१४४} = १२ = लम्ब$$

$$\therefore कोछे आ = \frac{कर्ण}{लम्ब} = \frac{१३}{१२}$$

$$कोस्प आ = \frac{आधार}{लम्ब} = \frac{५}{१२}$$ उपपन्नम्।

उ (२) यदि ज्याआ = $\frac{१}{३}$ तदाऽन्यसम्बन्धा साध्यन्ताम्

अतोऽत्र $(\frac{१}{३})^२$ + कोज्या^{२}आ = १, अर्थात् कोज्या^{२}आ = $१ - \frac{१}{९} = \frac{८}{९}$

$$\therefore कोज्याआ = \frac{२\sqrt{२}}{३}$$

$$एवम् स्पआ = \frac{ज्याआ}{कोज्याआ} = \frac{१}{२\sqrt{२}} = \frac{\sqrt{२}}{४}$$

$$कोस्पआ = \frac{१}{स्पअ} = २\sqrt{२}$$

$$कोछेआ = \frac{१}{ज्याआ} = ३, \quad छेआ = \frac{१}{कोज्याआ} = \frac{३}{२\sqrt{२}} = \frac{३\sqrt{२}}{४}$$

$$ज्याउआ = १ - कोज्याआ = १ - \frac{२\sqrt{२}}{३}$$

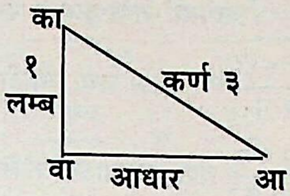
$$तथा कोज्याउआ = १ - ज्याआ = १ - \frac{१}{३} = \frac{२}{३}$$

शालिनी-यदि ज्या आ = $\frac{१}{३}$ तो अन्य सम्बन्धों में क्या ? इसका प्रदर्शन

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्रस्तुत रीति से भी किया जाता है–



$$\text{ज्या आ} = \frac{१}{३} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$$

$$\therefore \text{आधार} = \sqrt{\text{कर्ण}^{२} - \text{लम्ब}^{२}} = \sqrt{३^{२} - १^{२}}$$

$$= \sqrt{९ - १} = \sqrt{८} = २\sqrt{२} = \text{आधार}$$

$$\therefore \text{कोज्या आ} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{२\sqrt{२}}{३}$$

$$\text{स्प आ} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{१}{२\sqrt{२}}$$

$$\text{कोस्प आ} = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{२\sqrt{२}}{१} = २\sqrt{२}$$

$$\text{छे आ} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{३}{२\sqrt{२}}$$

$$\text{कोछे आ} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{३}{१} = ३$$

इत्युपपन्नम्।

(३) अभ्यासार्थं प्रश्नाः।

१. यदि स्पअ $= \frac{१}{२}$ तदा छेअ, कोछेअ माने के?

२. यत्र छेदनरेखा = ७ तत्र ज्या, कोटिस्पर्शमाने के?

३. यदि ज्याअ–कोज्याअ = ०, तदा कोछेअमानं किम्?

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

४. यदि ज्याअ = $\frac{म}{न}$ तदा $\sqrt{न^२ - म^२}$ × स्पअ = म इति साधय

५. यदि प कोस्पअ = $\sqrt{क^२ - प^२}$ तदा ज्याअ मानं किम्?

६. यदि छेअ = $\frac{म^२+१}{२ म}$ तदा स्पअ तथा ज्याअ माने के?

७. यदि स्पअ = $\frac{२ पक}{प^२ - क^२}$ तदा कोज्याअ, कोछेअ माने साध्ये

८. यदि छेअ = $\frac{१३}{५}$ तदा $\frac{२ ज्याअ - ३ कोज्याअ}{४ ज्या - ९ कोज्याअ}$ अस्य मानं किम्?

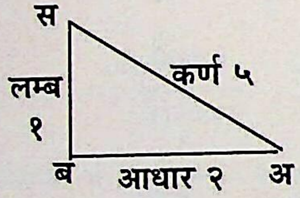
९. यदि कोस्पअ = $\frac{प}{क}$ तदा $\frac{प कोज्याअ - क ज्याअ}{प कोज्याअ + क ज्याअ}$ अत्र मानं किम्?

१०. यदि स्पइ = $\frac{१}{\sqrt{७}}$ तदा $\frac{कोछे^२ इ - छे^२ इ}{कोछे^२ इ + छे^२ इ}$ अत्र मानं किम्?

११. यदि स्पइ + कोस्पइ = २, तदा ज्याइमानं किम्?

(३) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

शालिनी-(१) यदि स्पअ = $\frac{१}{२}$, तदा छे अ, कोछे अ माने के?



स्प अ = $\frac{लम्ब}{आधार}$

लम्ब = १

आधार = २

तदा कर्ण = $\sqrt{लम्ब^२ + आधार^२} = \sqrt{१^२ + २^२}$

$= \sqrt{१ + ४} = \sqrt{५}$ = कर्णः

$\therefore$ छे अ = $\frac{कर्णः}{आधार} = \frac{\sqrt{५}}{२}$

कोछे अ = $\frac{कर्ण}{लम्ब} = \frac{\sqrt{५}}{१} = \sqrt{५}$

(२) यत्र छेदन रेखा = ७, तत्र ज्या, कोटिस्पर्श माने के?

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{अत्र छे अ} = \frac{७}{१} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$$

$$\therefore \text{लम्ब} = \sqrt{\text{कर्ण}^२ - \text{आधार}^२}$$

$$= \sqrt{७^२ - १^२} = \sqrt{४९ - १} = \sqrt{४८}$$

$$\therefore \text{ज्या अ} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{\sqrt{४८}}{७}$$

$$\text{कोस्प अ} = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{१}{\sqrt{४८}}$$

(३) यदि ज्या अ – कोज्या अ = ०, तदा कोछेअ मान किम्?

$$\because \text{ज्या अ} - \text{कोज्या अ} = ०$$

$$\therefore \text{ज्या अ} = \text{कोज्या अ}$$

$$\text{या} \quad \frac{\text{ज्याअ}}{\text{ज्या अ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$ (उभौ पक्षौ ज्याअ विभाजिते सति)

$$\text{या} \quad \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} = १$$

या कोस्प अ = १,

$$\therefore \text{कोछेअ} = \sqrt{१ + \text{कोस्प}^२ \text{ अ}}$$

$$= \sqrt{१ + १^२} = \sqrt{२}$$

(४) यदि ज्याअ = $\frac{\text{म}}{\text{न}}$, तदा $\sqrt{\text{न}^२ - \text{म}^२} \times$ स्पअ = म इति साधय।

$$\therefore \text{ज्या अ} = \frac{\text{म}}{\text{न}}$$

$$\therefore \text{कोज्या अ} = \sqrt{१ - \frac{\text{म}^२}{\text{न}^२}} = \sqrt{\frac{\text{न}^२ - \text{म}^२}{\text{न}^२}}$$

$$\therefore \text{स्प अ} = \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्या अ}} = \frac{\text{म}/\text{न}}{\sqrt{\frac{\text{न}^२ - \text{म}^२}{\text{न}^२}}}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$= \frac{म}{न} \times \frac{न}{\sqrt{न^२ - म^२}} = \frac{म}{\sqrt{न^२ - म^२}}$$

अत्र $- \sqrt{न^२ - म^२} \times$ स्पअ

$$= \sqrt{न^२ - म^२} \times \frac{म}{\sqrt{न^२ - म^२}} = म$$ इत्युपपन्नम्।

(५) यदि प कोस्प अ $= \sqrt{क^२ - प^२}$ तदा ज्या अ मानं किम्?

$$\because प \text{ कोस्प } अ = \sqrt{क^२ - प^२}$$

$$\therefore \text{कोस्प } अ = \frac{\sqrt{क^२ - प^२}}{प}$$

$$\text{कोस्प}^२ अ = \frac{क^२ - प^२}{प^२}$$

$$\because \text{कोछ } अ = \sqrt{१ + \text{कोस्प}^२ अ} = \sqrt{१ + \frac{क^२ - अ^२}{प^२}}$$

$$= \frac{\sqrt{प^२ + क^२ - प^२}}{प^२} = \sqrt{\frac{क^२}{प^२}} = \frac{क}{प}$$

$$\therefore \text{ज्या } अ = \frac{१}{\text{कोछेअ}} = \frac{१/१}{क/प} = \frac{१}{१} \times \frac{प}{क}$$

$$= \frac{प}{क}$$ = उपपन्नम्।

(६) यदि छेअ $= \frac{म^२ + १}{२ म}$, तदा स्प अ तथा ज्या अ माने के?

$$\because \text{छेअ} = \frac{म^२+१}{२ म} \quad \therefore \text{छे}^२ अ = \left(\frac{म^२+१}{२ म}\right)^२$$

$$= \frac{म^४ + २ म^२ + १}{४ म^२}$$

$$\because \text{स्प } अ = \sqrt{\text{छे}^२ अ - १} = \sqrt{\frac{म^४ + २ म^२ + १}{४ म^२} - १}$$

$$= \sqrt{\frac{म^४ + २ म^२ + १ - ४ म^२}{४ म^२}} = \sqrt{\frac{म^४ - २ म^२ + १}{४म^२}}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$= \frac{म^2 - १}{२ म} \quad \ldots\ldots\ldots (१)$$

$$\therefore \text{कोस्प अ} = \frac{१}{\text{स्पअ}} = \frac{२ म}{म^2 - १} \text{ तदा}$$

$$\text{ज्या अ} = \frac{१}{\text{को छे अ}} = \frac{१}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^2 \text{ अ}}}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{१ + \left(\frac{२म}{म^2 - १}\right)^2}} = \frac{१}{\sqrt{\frac{(म^2 - १)^2 + ४म^2}{(म^2 - १)^2}}}$$

$$= \frac{१}{\sqrt{\frac{म^4 + १ - २ म^2 + ४ म^2}{(म^2 - १)^2}}} = \frac{१}{\sqrt{\frac{(म^2 + १)^2}{(म^2 - १)^2}}}$$

$$= \frac{म^2 - १}{म^2 + १} \quad \ldots\ldots (२)$$

अत उपपन्नम्।

(७) यदि स्पअ अ $= \frac{२ \text{ पक}}{प^2 - क^2}$ तदा कोज्या अ, कोछेअ माने साध्ये?

$$\because \text{ स्पअ} = \frac{२ \text{ पक}}{प^2 - क^2} \therefore \text{ कोस्प अ} = \frac{प^2 - क^2}{२ \text{ पक}}$$

$$\text{पुनः कोछेअ} = \sqrt{१ + \text{कोस्प}^2 \text{ अ}} = \sqrt{१ + \left(\frac{प^2 - क^2}{२ \text{ पक}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{१ + \frac{प^4 + क^4 + २ प^2 क^2}{४प^2क^2}} = \sqrt{\frac{४प^2क^2 + प^4 + क^4 -- २प^2क^2}{४ प^2 क^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{प^2 + क^2 + २ \text{ पक}}{४ प^2क^2}} = \sqrt{\frac{(प^2 + क^2)^2}{४प^2क^2}} = \frac{प^2 + क^2}{२\text{पक}} \quad \ldots\ldots(१)$$

$$\therefore \text{ ज्या अ} = \frac{१}{\text{कोछेअ}} = \frac{२ \text{ पक}}{प^2 + क^2}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$कोज्याअ = \sqrt{१ - ज्या^२अ} = \sqrt{१ - \left(\frac{२ पक}{प^२+क^२}\right)^२}$$

$$= \sqrt{\frac{(प^२ + क^२)^२ - ४प^२क^२}{(प^२ + क^२)^२}} = \sqrt{\frac{(प^२ - क^२)^२}{(प^२ + क^२)^२}}$$

$$या\ कोज्या\ अ = \frac{प^२ - क^२}{प^२ + क^२} \quad .... (२)$$

उपपन्नम्।

(८) यदि छे अ $= \frac{१३}{५}$ तदा $\frac{२ज्याअ - ३\ कोज्या\ अ}{४ज्याअ - ९\ कोज्या\ अ}$

अस्य मानं किम्?

$\therefore$ छेअ $\frac{१३}{५}$, $\therefore$ कोज्याअ $\frac{५}{१३}$

$$ज्याअ = \sqrt{१ - कोज्या^२अ} = \sqrt{१ - \frac{२५}{१६९}}$$

$$= \sqrt{\frac{१६९ - २५}{१६९}} = \sqrt{\frac{१४४}{१६९}} = \frac{१२}{१३}$$

$$\therefore \frac{२\ ज्याअ - ३\ कोज्याअ}{४\ ज्याअ - ९\ कोज्याअ}$$

$$= \frac{२ \times \frac{१२}{१३} - ३ \times \frac{५}{१३}}{४ \times \frac{१२}{१३} - ९ \times \frac{५}{१३}} = \frac{\frac{२४}{१३} - \frac{१५}{१३}}{\frac{४८}{१३} - \frac{४५}{१३}}$$

$$= \frac{२४ - १५}{४८ - ४५} = \frac{९}{३} = ३, उपपन्नम्।$$

(९) यदि कोस्पअ $= \frac{प}{क}$ तदा $\frac{प\ कोज्या\ अ - क\ ज्याअ}{प\ कोज्याअ + कज्या\ अ}$

अत्र मानं किम्?

$\because$ कोस्पअ $= \frac{प}{क}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\therefore \text{कोछे अ} = \sqrt{१ + \text{कोस्प}^२ \text{ अ}} = \sqrt{१ + \frac{\text{प}^२}{\text{क}^२}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{क}^२ + \text{प}^२}{\text{क}^२}} = \frac{\sqrt{\text{क}^२ + \text{प}^२}}{\text{क}}$$

$$\therefore \text{ज्याअ} = \frac{१}{\text{कोछेअ}} = \frac{\text{क}}{\sqrt{\text{क}^२ + \text{प}^२}}$$

$$\text{एवञ्च कोज्या अ} = \sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{अ}} = \sqrt{१ - \frac{\text{क}^२}{\text{क}^२ + \text{प}^२}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{क}^२ + \text{प}^२ - \text{क}^२}{\text{क}^२ + \text{प}^२}} = \frac{\text{प}}{\sqrt{\text{क}^२ + \text{प}^२}}$$

$$= \frac{\text{प कोज्या अ} - \text{कज्याअ}}{\text{प कोज्या अ} + \text{कज्याअ}}$$

$$= \frac{\text{प} \times \frac{\text{प}}{\sqrt{\text{क}^२ + \text{प}^२}} - \text{क} \times \frac{\text{क}}{\sqrt{\text{क}^२ + \text{प}^२}}}{\text{प} \times \frac{\text{प}}{\sqrt{\text{क}^२ + \text{प}^२}} + \text{क} \times \frac{\text{क}}{\sqrt{\text{क}^२ + \text{प}^२}}}$$

$$= \frac{\frac{\text{प}^२ - \text{क}^२}{\sqrt{\text{क}^२ + \text{प}^२}}}{\frac{\text{प}^२ + \text{क}^२}{\sqrt{\text{क}^२ + \text{प}^२}}} = \frac{\text{प}^२ - \text{क}^२}{\text{प}^२ + \text{क}^२}$$ उपपन्नम्

(१०) यदि $\text{स्पइ} = \frac{१}{\sqrt{७}}$ तदा $\frac{\text{कोछे}^२ \text{ इ} - \text{छे}^२\text{इ}}{\text{कोछे}^२ \text{ इ} + \text{छे}^२\text{इ}}$

अत्र मानं किम्?

$\because \text{स्प इ} = \frac{१}{\sqrt{७}}$, तदा

$$\text{कोस्प इ} = \sqrt{७}$$

$\therefore \text{स्प}^२ \text{ इ} = \frac{१}{७}$, एवमेव $\text{कोस्प}^२ \text{ इ} = ७$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$छे^{२} इ = १ + स्प^{२} इ + १ + \frac{१}{७} = \frac{७+१}{७}$

$= \frac{८}{७}$

$कोछे^{२}इ = १ + कोस्प^{२} इ = १ + ७ = ८$

$\frac{कोछे^{२}इ - छे^{२} इ}{को छे^{२} इ + छे^{२} इ} = \frac{८ - \frac{८}{७}}{८ + \frac{८}{७}}$

$= \frac{\frac{५६ - ८}{७}}{\frac{५६ + ८}{७}} = \frac{४८}{६४} = \frac{३}{४}$ उत्पन्नम्

(११) यदि स्पइ + कोस्प इ = २, तदा ज्याइ मानं किम्?

$\because$ स्पइ + कोस्प इ = २

$\therefore \frac{१}{कोस्पइ} + कोस्पइ = २$

या $\frac{१ + कोस्प^{२} इ}{कोस्पइ} = २$

या, $१ + कोस्प^{२} इ = २$ कोस्पइ

या, $कोस्प^{२} इ - २ कोस्प इ + १ = ०$

या $(कोस्प इ - १)^{२} = ०$

$\therefore$ कोस्प इ − १ = ०

$\therefore$ कोस्प इ = १

पुनः $कोछे^{२} इ = १ + कोस्प^{२} इ = १ + १ = २$

$\therefore कोछेइ = \sqrt{२}$

$\therefore ज्या इ = \frac{१}{\sqrt{२}}$ अत उपपन्नम्।

(१२) यदि $छे^{२} इ = २ + २$ स्पइ, तदा स्पइ मानं साध्यताम्?

$\because छे^{२} इ = २ + २$ स्पइ

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

या, १ + स्प^{२} इ = २ + २ स्पइ

या, १ + स्प^{२}इ − २ -- २ स्पइ = ०

या, स्प^{२}इ − २ स्पइ − १ = ०

कल्प्यते स्पइ = य, तदा–

$य^{२} - २ य - १ = ०$

या, $य^{२} - २ य + १ - १ - १ = ०$

या, $य^{२} - २ य + १ - २ = ०$

या, $(य - १)^{२} - (\sqrt{२})^{२} = ०$

या, $(य - १ - \sqrt{२})(य - १ + \sqrt{२}) = ०$

या, $य = \sqrt{२} + १,\ य = १ - \sqrt{२}$

∴ स्प इ = $१ + \sqrt{२} = १ + १.४१४$

= २.४१४ उत्तरम्।

(१३) यदि स्पइ = $\dfrac{२ य (य + १)}{२ य + १}$, तदा ज्याइ तथा कोज्या इ माने साध्येताम्?

∵ स्पइ = $\dfrac{२ य (य + १)}{२ य + १}$

∴ कोस्प इ = $\dfrac{२ य + १}{२ य (य + १)}$

तदा कोछेइ = $\sqrt{१ + \text{कोस्प}^{२}\text{इ}}$

$$= \sqrt{१ + \left(\frac{२ य + १}{२य (य + १)}\right)^{२}}$$

$$= \sqrt{\frac{४ य^{२} (य^{२} + २य + १) + ४य^{२} + ४य + १}{४य^{२} (य + १)^{२}}}$$

$$= \sqrt{\frac{४य^{४} + ८य^{३} + ४य^{२} + ४य^{२} + ४य + १}{\{ २य (य + १) \}^{२}}}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

या, कोछे इ $= \dfrac{(२य^२)^२+(२य)^२+(१)^२+२.२\ य^२.\ १+२\ २य१+२.२\ य^२.\ २य}{\{ २\ य\ (य + १)\ \}^२}$

$= \sqrt{\dfrac{(२\ य^२ + २य + १)^२}{\{ २\ य\,(य + १)\}^२}} = \dfrac{२य^२ + २य + १}{२\ य\ (य + १)}$

$\therefore$ ज्या इ $= \dfrac{२\ य\ (य + १)}{२य^२ + २य + १}$ ....(१)

$\therefore$ कोज्या इ $= \sqrt{१ - \left(\dfrac{२य\ (य + १)}{२य^२ + २य + १}\right)^२}$

$= \sqrt{\dfrac{(२य^२ + २य + १)^२ - \{२य\ (य + १)\}^२}{(२य^२ + २य + १)^२}}$

$= \sqrt{\dfrac{४य^४ + ८य^३ + ४य^२ + ४य + ४य^२ + १ - ४य^४\ (य^२+२य+१)}{(२य^२ + २य + १)^२}}$

$= \sqrt{\dfrac{४य^४ + ८य^३ + ४य^२ + ४य + ४य^२ + १- ४य^४-८य^३ -४य^२}{(२य^२ + २य + १)^२}}$

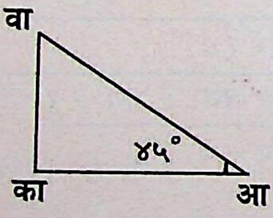
$= \sqrt{\dfrac{४य^२ + ४य + १}{(२य^२ + २य + १)^२}} = \sqrt{\dfrac{(२य)^२ + २.२य.\ १ + (१)^२}{(२य^२ + २य + १)^२}}$

$= \sqrt{\dfrac{(२य + १)^२}{(२य^२ + २य + १)^२}} = \dfrac{२य + १}{२य^२ + २य + १}$

= कोज्या इ, अत उपपन्नम्।

।।इति।।

४५° पञ्चचत्वारिंशदंशानां त्रैकोणमितिकसम्बन्धाः



कल्प्यते आकावा समद्विबाहुकं जात्यत्रिभुजं यत्र का कोणः समकोणस्तथा आ=वा४५°, कल्प्यतां तुल्यभुजौ तु, तदा आका=वाका=तु तथा आवा^{२}= तु^{२}+तु^{२} = २ तु^{२}, $\therefore$ आवा = तु $\sqrt{२}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{यतः ज्या } ४५° = \frac{\text{वाका}}{\text{आवा}} = \frac{\text{तु}}{\text{तु}\sqrt{२}} = \frac{१}{\sqrt{२}}$$

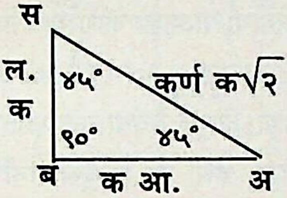
$$\text{कोज्या } ४५° = \frac{\text{आका}}{\text{आवा}} = \frac{\text{तु}}{\text{तु}\sqrt{२}} = \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$$\text{स्प } ४५° = \frac{\text{वाका}}{\text{आका}} = \frac{\text{तु}}{\text{तु}} = \frac{\text{तु}}{\text{तु}} = १$$

अन्ये त्रयः सम्बन्धाः एषां व्युत्क्रमसम्बन्धतुल्याः

अतः कोछे ४५° = $\sqrt{२}$, छे ४५° = $\sqrt{२}$, कोस्प ४५° = १,

४५° का त्रैकोणमितिक सम्बन्ध



शालिनी—कल्पना किया कि अबस एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है। जिसकी भुजा अब = बस = क, L ब = ९०°, L स = अ = ४५° कोण 'स' के लिये अब = लम्ब, बस = आधार

अस = कर्ण।

$$\therefore \text{ कर्ण} = \sqrt{\text{लम्ब}^२ + \text{आधार}^२} = \sqrt{\text{क}^२ + \text{क}^२}$$

$$= \sqrt{२\text{क}^२} = \text{क}\sqrt{२} = \text{कर्ण।}$$

$$\therefore \text{ ज्या } ४५° = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{क}}{\text{क}\sqrt{२}} = \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$$\text{कोज्या } ४५° = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{क}}{\text{क}\sqrt{२}} = \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$$\text{स्प } ४५° = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{\text{क}}{\text{क}} = १$$

$$\text{कोस्प } ४५° = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{\text{क}}{\text{क}} = १$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

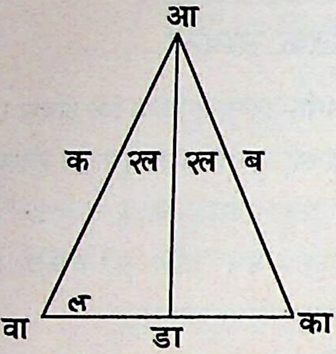
CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{छे } ४५^\circ = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{\text{क}\sqrt{२}}{\text{क}} = \sqrt{२}$$

$$\text{कोछे } ४५^\circ = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{\text{क}\sqrt{२}}{\text{क}} = \sqrt{२}$$

उपपन्नम्।

षष्टयंशानां त्रिंशदंशानां तथा विशिष्टकोणानां च त्रैकोणमितिकसम्बन्धाः-



कल्प्यतां आवाक समबाहुकं त्रिभुजम्। अतोऽत्र प्रत्येककोणः ६०°, आडारेखया वाआका कोणस्यार्धं विधीयतां तदा ∠वाआडा= ३०° (रे १।४) आवाडा, आकाडा, त्रिभुजे सर्वथा तुल्ये अतः वाडा = काडा, तथा डा विन्दुसंलग्नौ कोणौ समाख्यौ, आडावा जात्यत्रिभुजे कल्प्यतां वाडा = ल, तदा

$$\text{आवा} = \text{वाका} = २\ \text{ल},\ \therefore\ \text{आडा}^२ = ४\ \text{ल}^२ - \text{ल}^२ = ३\ \text{ल}^२,$$

$$\therefore \text{आडा} = \text{ल}\ \sqrt{३}$$

$$\therefore \text{ज्या } ६०^\circ = \frac{\text{आडा}}{\text{आवा}} = \frac{\text{ल}\sqrt{३}}{२\ \text{ल}} = \frac{\sqrt{३}}{२}$$

$$\text{कोज्या } ६०^\circ = \frac{\text{वाडा}}{\text{आवा}} = \frac{\text{ल}}{२\text{ल}} = \frac{१}{२}$$

$$\text{स्प } ६०^\circ = \frac{\text{आडा}}{\text{वाडा}} = \frac{\text{ल}\sqrt{३}}{\text{ल}} = \sqrt{३}$$

$$\text{एवं ज्या } ३०^\circ = \frac{\text{वाडा}}{\text{आवा}} = \frac{\text{ल}}{२\text{ल}} = \frac{१}{२}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

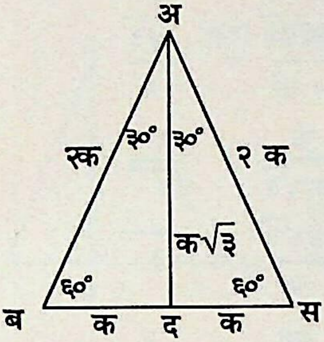
CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{कोज्या } ३०^\circ = \frac{\text{आडा}}{\text{आवा}} = \frac{\text{ल}\sqrt{३}}{२\text{ ल}} = \frac{\sqrt{३}}{२}$$

$$\text{स्पा } ३०^\circ = \frac{\text{वाडा}}{\text{आडा}} = \frac{\text{ल}}{\text{ल}\sqrt{३}} = \frac{१}{\sqrt{३}}$$

एवमन्येऽपि सम्बन्धाः साधिता भवन्ति।

शालिनी–६०° एवं ३०° का त्रैकोणमितिकसम्बन्ध



कल्पना किया कि अबस एक समभुजत्रिभुज है। जिसकी प्रत्येक भुजा बराबर है अर्थात् अब = बस=अस =२क।Lअ = L ब = L स = ६०°

कोण 'अ' को समद्विभाग करते हुये अद लम्ब बस रेखा के उपर किया। अतः L ब अ द = द स अ = ३०°। एवञ्च भुजा ब द = द स=क

Δ अ ब द में अ द (लम्ब) = $\sqrt{\text{कर्ण}^२ - \text{आधार}^२}$

$= \sqrt{(२\text{क})^२ - (\text{क})^२} = \sqrt{४ \text{ क}^२ - \text{क}^२} = \sqrt{३ \text{ क}^२}$

$=$ क $\sqrt{३}$ = अ द (लम्ब)।

L अ ब द

$$\text{ज्या } ६०^\circ = \frac{\text{ल०}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{क}\sqrt{३}}{२\text{क}} = \frac{\sqrt{३}}{२}$$

$$\text{कोज्या } ६०^\circ = \frac{\text{ल०}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{क}}{२\text{क}} = \frac{१}{२}$$

$$\text{स्प } ६०^\circ = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{\text{क}\sqrt{३}}{\text{क}} = \sqrt{३}$$

$$\text{कोज्या } ६०^\circ = \frac{\text{आ०}}{\text{ल०}} = \frac{\text{क}}{\text{क}\sqrt{३}} = \frac{१}{\sqrt{३}}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{छे } ६०^\circ = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आ०}} = \frac{\text{२ क}}{\text{क}} = २$$

$$\text{कोछे } ६०^\circ = \frac{\text{कर्ण}}{\text{ल०}} = \frac{\text{२क}}{\text{क}\sqrt{३}} \quad \frac{२}{\sqrt{३}}$$

L ब अ द

$$\text{ज्या } ३०^\circ = \frac{\text{ल०}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{क}}{\text{२क}} = \frac{१}{२}$$

$$\text{कोज्या } ३०^\circ = \frac{\text{आ०}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{क}\sqrt{३}}{\text{२ क}} = \frac{\sqrt{३}}{२}$$

$$\text{स्प } ३०^\circ = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आ०}} = \frac{\text{क}}{\text{क}\sqrt{३}} = \frac{१}{\sqrt{३}}$$

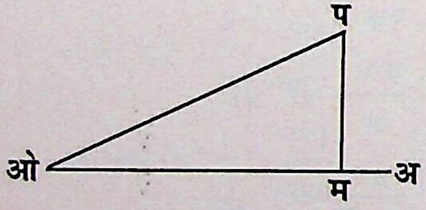
$$\text{कोस्प } ३०^\circ = \frac{\text{आ०}}{\text{ल०}} = \frac{\text{क}\sqrt{३}}{\text{क}} = \sqrt{३}$$

$$\text{कोछे } ३०^\circ = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आ०}} = \frac{\text{२क}}{\text{क}\sqrt{३}} = \frac{२}{\sqrt{३}}$$

$$\text{कोछे } ३०^\circ = \frac{\text{कर्ण०}}{\text{ल०}} = \frac{\text{२ क}}{\text{क}} = २$$

उपपन्नम्।

यदा कोणः ०°



कल्प्यतां भ्रमन्ती काचित् ओपरेखा ओअरेखया अत्यल्पं मओपकोणं रचितवती तदा मपमानमत्यल्पम्। तथा यदा ओपरेखा ओअरेखायामेव संलग्ना आसीत्, अर्थाद्यदा मपरेखायाः मानं गणयितुमशक्यं तदा मप = ०, तथात्र स्थितौ म, प विन्दू मिलितावेव स्थितौ अतस्तत्र

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

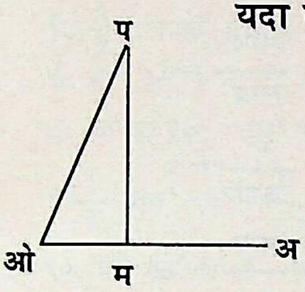
अओपकोणमानं = ०, ओम = ओप तथा मप = ०,

$$\text{अतः ज्या } ०^\circ = \frac{\text{मप}}{\text{ओप}} = \frac{०}{\text{ओप}} = ०, \text{ कोज्या } ०^\circ = \frac{\text{ओम}}{\text{ओप}} = \frac{\text{ओम}}{\text{ओम}} = १$$

$$\text{स्प } ०^\circ = \frac{०}{१} = ०, \text{ एवं कोस्प } ०^\circ = \frac{१}{\text{स्प } ०^\circ} = \frac{१}{०} = \infty$$

$$\text{एवं छे}०^\circ = \frac{१}{\text{कोज्या}०^\circ} = \frac{१}{१} = १, \text{कोछे } ०^\circ = \frac{१}{\text{ज्या}०^\circ} = \frac{१}{०} = \infty$$

यदा कोणः ९०°



कल्प्यतां अओप कोणः समकोण-प्रायकोणतुल्यः। यदा भ्रमन्ती ओप रेखा समकोणं रचयति तदा म विन्दुः ओ विन्दूपरि पतति तदा ओम शून्यं तथा ओप = मप

$$\text{अतः ज्या } ९०^\circ = \frac{\text{मप}}{\text{ओप}} = \frac{\text{ओप}}{\text{ओप}} = १$$

$$\text{कोज्या } ९०^\circ = \frac{\text{ओम}}{\text{ओप}} = \frac{०}{\text{ओप}} = ०,$$

$$\text{स्प } ९०^\circ = \frac{\text{मप}}{\text{ओम}} = \frac{\text{सावधिकमान}}{\text{अनन्तमान}} = \infty$$

$$\text{कोस्प } ९०^\circ = \frac{\text{ओम}}{\text{मप}} = \frac{०}{\text{मप}} = ०,$$

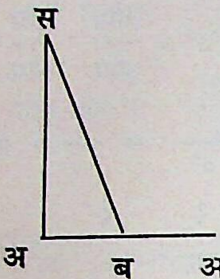
$$\text{छे } ९०^\circ = \frac{\text{ओप}}{\text{ओम}} = \infty, \text{ यथा स्पर्श रेखायाम्}$$

$$\text{तथा कोछे } ९०^\circ = \frac{\text{ओप}}{\text{मप}} = \frac{\text{ओप}}{\text{ओप}} = १$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

९०° का त्रैकोणमितिक सम्बन्ध-



शालिनी-कल्पना किया कि अ ब स एक अतिन्यून कोण समकोण त्रिभुज है। जिसका कर्ण = ब स, लम्ब = अस, आधार=अब

L अ = समकोण = ९०°, L स = अतिन्युनकोण अर्थात् शून्यतुल्य। ∴ अब = आधार = ०

अस = बस अर्थात् लम्ब = कर्ण।

$$\therefore \text{ ज्या } ९०° = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{लम्ब}} = १$$

$$\text{कोज्या } ९०° = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{०}{\text{कर्ण}} = ०$$

$$\text{स्प } ९०° = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{\text{लम्ब}}{०} = \infty$$

$$\text{कोस्य } ९०° = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{०}{\text{लम्ब}} = ०$$

$$\text{छे } ९०° = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{\text{कर्ण}}{०} = \infty$$

$$\text{कोछे } ९०° = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{कर्ण}} = १ \text{ इत्युपपन्नम्।}$$

अत्राभ्यासार्थमेका सारिणी

कोणः	ज्या	कोज्या	स्प	कोस्य	छे	कोछे
०°	०	१	०	∞	१	∞
३०°	$\frac{१}{२}$	$\frac{\sqrt{३}}{२}$	$\frac{१}{\sqrt{३}}$	$\sqrt{३}$	$\frac{२}{\sqrt{३}}$	२
४५°	$\frac{१}{\sqrt{२}}$	$\frac{१}{\sqrt{२}}$	१	१	$\sqrt{२}$	$\sqrt{२}$
६०°	$\frac{\sqrt{३}}{२}$	$\frac{१}{२}$	$\sqrt{३}$	$\frac{१}{\sqrt{३}}$	२	$\frac{२}{\sqrt{३}}$
९०°	१	०	∞	०	∞	१

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(४) अभ्यासार्थं प्रश्नाः।

अधोलिखितानां मानानि साध्यानि

१. स्प^{३} ४५° + ४ कोज्या^{३} ६०°

२. कोस्प ६०° स्प ३०° + छे^{२} ४५°

३. २ ज्या ३०° कोज्या ३०° कोस्प ६०°

४. स्प^{२} ४५° ज्या ६०° स्प ३०° स्प^{२} ६०°

५. स्प^{२} ६०° + ४ कोज्या^{२} ४५° + ३ छे^{२} ३०°

६. $\frac{१}{२}$ कोछे^{२} ६०° + छे^{२} ४५° − २ कोस्प^{२} ६०°

७. स्प^{२} ३०° + २ ज्या ६०° + स्प ४५° − स्प ६०° + कोज्या^{२} ३०°

८. कोज्या ६०° − स्प^{२} ४५° + $\frac{३}{४}$ स्प^{२} ३०° + कोज्या^{२} ३०° − ज्या ३०°

९. $\frac{१}{३}$ ज्या^{२} ६०° − $\frac{१}{२}$ छे ६०° स्प^{२} ३०° + $\frac{४}{३}$ ज्या^{२} ४५° स्प^{२} ६०°

१०. यदि स्प^{२} ४५° − कोज्या^{२} ६०° = य ज्या ४५° कोज्या ४५° × स्प ६०°, तदा य मानं किम्?

११. य ज्या ३०° कोज्या^{२} ४५° = $\dfrac{\text{कोस्प}^{२}\,३०°\ \text{छे}\,६०°\ \text{स्प}\,४५°}{\text{कोछे}^{२}\,४५°\ \text{कोछे}\,३०°}$

अत्रापि य मानं किम्?

उपरिलिखितानां मानानि साध्यन्ते–

(१) स्प^{३} ४५° + ४ कोज्या^{३} ६०°

$$= (१)^{३} + ४ \times \left(\frac{१}{२}\right)^{३} + ४ \times \frac{१}{८}$$

$$= १ + \frac{१}{२} = \frac{३}{२} = १\frac{१}{२}$$ उत्तरम्।

(२) कोस्प ६०° स्प ३०° + छे ४५°

$$= \frac{१}{\sqrt{३}} \times \frac{१}{\sqrt{३}} + (\sqrt{२})^{२}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$= \frac{१}{३} + २ = \frac{१ + ६}{३} = \frac{७}{३} = २\frac{१}{३}$$ उत्तरम्

(३) २ ज्या ३०° कोज्या ३०° कोस्प ६०°

$$= २ \times \frac{१}{२} \times \frac{\sqrt{३}}{२} \times \frac{१}{\sqrt{३}} = \frac{१}{२}$$

उत्तरम्।

(४) स्प^{२} ४५° ज्या ६०° स्प ३०° स्प^{२} ६०°

$$= १ \times \frac{३}{२} \times \frac{१}{३} + (\sqrt{३})^{२}$$

$$= \frac{३}{२} = १\frac{१}{२}$$ उत्तरम्।

(५) स्प^{२} ६०° + ४ कोज्या^{२} ४५° + ३ छे^{२} ३०°

$$= (\sqrt{३})^{२} + ४\left(\frac{१}{\sqrt{२}}\right)^{२} + ३ \times \left(\frac{२}{\sqrt{३}}\right)^{२}$$

$$= ३ + ४ \times \frac{१}{२} + ३ \times \frac{४}{३}$$

$$= ३ + २ + ४ = ९$$ उत्तरम्।

(६) $\frac{१}{२}$ कोछे^{२} ६०° + छे^{२} ४५° – २ कोस्प^{२} ६०°

$$= \frac{१}{२} \times \frac{२}{\sqrt{३}} + (\sqrt{२})^{२} - २ \times \left(\frac{१}{\sqrt{३}}\right)^{२}$$

$$= \frac{१}{२} \times \frac{४}{३} + २ - \frac{२}{३} = \frac{२+६-२}{३}$$

$$= \frac{६}{३} = २$$ उत्तरम्।

(७) स्प^{२} ३०° + २ ज्या ६०° + स्प ४५° – स्प ६०° + कोज्या^{२} ३०°

$$= \left(\frac{१}{\sqrt{३}}\right)^{२} + २ \times \frac{\sqrt{३}}{२} + १ - \sqrt{३} + \left(\frac{\sqrt{३}}{२}\right)^{२}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$= \frac{१}{३} + \sqrt{३} + १ - \sqrt{३} + \frac{३}{४} = \frac{१}{३} + १ + \frac{३}{४}$

$= \frac{४ + १२ + ९}{१२} = \frac{२५}{१२} = २ \frac{१}{१२}$ उत्तरम्।

(८) कोज्या ६०° – स्प^{२} ४५°+ $\frac{३}{४}$स्प^{२} ३०°+कोज्या^{२} ३०° –ज्या ३०°

$= \frac{१}{२} - १ + \frac{३}{४} (\frac{१}{\sqrt{३}})^{२} + (\frac{\sqrt{३}}{२})^{२} - \frac{१}{२}$

$= \frac{१}{२} - १ + \frac{३}{४} \times \frac{१}{३} + \frac{३}{४} - \frac{१}{२}$

$= \frac{१}{४} - १ + \frac{३}{४} = \frac{१-४+३}{४}$

$= \frac{०}{४} = ०$ उत्तरम्।

(९) $\frac{१}{३}$ ज्या^{२} ६०° – $\frac{१}{२}$ छे ६०° स्प^{२} ३०° + $\frac{४}{३}$ज्या^{२} ४५° स्प^{२} ६०°

$= \frac{१}{३} \times (\frac{\sqrt{३}}{२})^{२} - \frac{१}{२} \times २ \times (\frac{१}{\sqrt{३}})^{२} + \frac{४}{३} \times (\frac{१}{\sqrt{२}})^{२} \times (\sqrt{३})^{२}$

$= \frac{१}{३} \times \frac{३}{४} - \frac{१}{२} \times २ \times \frac{१}{३} + \frac{४}{३} \times \frac{१}{२} \times ३$

$= \frac{१}{४} - \frac{१}{३} + २ = \frac{३-४+२४}{१२}$

$= \frac{२३}{१२} = १ \frac{११}{१२}$ उत्तरम्।

(१०) यदि स्प^{२} ४५° – कोज्या^{२} ६०° = य ज्या ४५° कोज्या ४५° x स्प ६०°, तदा य मानं किम्?

या $१ - (\frac{१}{२})^{२} = य \times \frac{१}{\sqrt{२}} \times \frac{१}{\sqrt{२}} \times \sqrt{३}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

या, $१ - \frac{१}{४} = य \times \frac{\sqrt{३}}{२}$

या, $\frac{४ - १}{४} = य \times \frac{\sqrt{३}}{२}$ या $य \times \frac{\sqrt{३}}{२} = \frac{३}{४}$

$\therefore य = \frac{३}{४} \times \frac{२}{\sqrt{३}} = \frac{\sqrt{३}}{२}$ उत्तरम्।

(११) य ज्या ३०° कोज्या² ४५° = $\frac{\text{कोस्प}^{२}\ ३०^{\circ}\ .\ \text{छे}\ ६०^{\circ}\ .\ \text{स्प}\ ४५^{\circ}}{\text{कोछे}^{२}\ ४५^{\circ}\ \text{कोछे}\ ३०^{\circ}}$

अत्रापि य मानं किम्?

या, $य \times \frac{१}{२} \times \left(\frac{१}{\sqrt{२}}\right)^{२} = \frac{(\sqrt{३})^{२} \times २ \times १}{(\sqrt{२})^{२} \times २}$

या, $य \times \frac{१}{२} \times \frac{१}{२} = \frac{३ \times २ \times १}{२ \times २}$

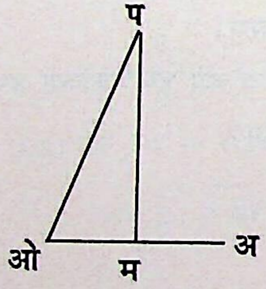
या, $= \frac{य}{४} = \frac{६}{४}$

या $४ य = ४ \times ६$

$\therefore य = \frac{४ \times ६}{४} = ६$ उत्तरम्।

।।इति।।

अथ कोणस्य तत्कोटेश्च त्रैकोणमितिकसम्बन्धः प्रदर्श्यते–



कल्प्यते ओमप जात्यत्रिभुजं यत्र ओमप कोणः समाख्यः तदा रेखागितेन $\angle$ मओप + $\angle$ मपओ = ९०° अतः मओप, कोणयोर्मध्ये एकोऽपरस्य कोटिः। अथ यदि $\angle$ मओप = इ तदा ज्या (९०° -इ) = कोज्याइ तथा कोज्या(९०°-इ) = ज्याइ

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

स्प (९०° - इ) = कोस्पइ, कोस्प (९०° -इ) = स्पइ

छे (९०° -इ) = कोछेइ, कोछे (९०° -इ) = छेइ

उ. (१) यदा कोज्या २आ = ज्या३आ तदा अ मानं किम्?

यतः कोज्या२आ = ज्या (९०°-२आ) ∴ ज्या (९०°-२आ)

= ज्या३आ ∴ ९०°-२आ = ३आ वा, ९०° = ५आ तेन आ = १८°

अग्रिमाध्याये १८° इत्यस्य अन्यदपि वैशिष्ट्यं प्रदर्शितं भविष्यति।

उ (२) छे आ. छे (९०° - आ) = स्प आ + स्प (९०° - आ) इति प्रदर्श्यताम्—अत्र तावत्

$$\text{वामपक्षः} = \text{छेआ कोछेआ} = \frac{१}{\text{कोज्याआ}} \times \frac{१}{\text{ज्याआ}} = \frac{१}{\text{ज्याआकोज्याआ}}$$

$$= \frac{\text{ज्या}^{२}\,\text{आ} + \text{कोज्या}^{२}\,\text{आ}}{\text{ज्याआ कोज्याआ}} = \frac{\text{ज्याआ}}{\text{कोज्याआ}} + \frac{\text{कोज्याआ}}{\text{ज्याआ}}$$

= स्पआ + कोस्पआ = स्पआ + स्प (९०°—आ)

अत्र यदि दक्षिणपक्षस्यैव स्पष्टीकरणं क्रियते तदाऽपि प्रकारः सुगमः

$$\text{तद्यथा स्पआ+कोस्पआ} = \frac{\text{ज्याआ}}{\text{कोज्याआ}} + \frac{\text{कोज्याआ}}{\text{ज्याआ}} = \frac{\text{ज्या}^{२}\text{आ}+\text{कोज्या}^{२}\text{आ}}{\text{कोज्याआज्याआ}}$$

$$= \frac{१}{\text{कोज्याआज्याआ}} = \text{छेआकोछेआ} = \text{छेआछे(९०°—आ)}$$

(५) निम्नलिखितप्रश्नाः साध्यन्ताम्।

१. कोज्या३अ = ज्या७आ
२. स्पअ = कोस्प ३अ
३. छे५अ = कोछेअ

} एषु अ मानं किम्?

४. ज्याअ स्प (९०°–अ) छे (९०°—अ) = कोस्पअ

५. कोज्याअ स्पअ स्प (९०°-अ) कोछे (९०°–अ)= १

६. ज्याअ कोज्या (९०°–अ) + कोज्याअ ज्या (९०°–अ) = १.

७. कोछे^{२} (९०°–अ) = १ + ज्या^{२}अ कोछे^{२} (९०°–अ)

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

८. ज्याअ कोस्पअ कोस्प (९०°–अ) = छे (९०°–अ) = १

९. स्प (९०° -अ) + कोस्प (९०°–अ) = कोछेअ कोछे (९०°–अ)

१०. $\dfrac{\text{ज्या (९०°–अ)}}{\text{छे (९०°–अ)}} \times \dfrac{\text{स्प (९०°–अ)}}{\text{कोज्याअ}} = \text{कोज्याअ}$

११. $\dfrac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ स्प}^{२}\text{अ}}{\text{कोस्प(९०°–अ)}} \times \dfrac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोज्याअ}} = \text{कोज्याअ}$

१२. $\dfrac{\text{कोछे}^{२}\text{अ स्प}^{२}\text{अ}}{\text{कोस्प(९०°–अ)}} \times \dfrac{\text{कोस्पअ}}{\text{छे}^{२}\text{अ}} = \text{छे}^{२}\text{ (९०°–अ)–१}$

१३. यदि ज्या (९०°-अ) कोस्प (९०°-अ)य

= कोज्या (९०°-अ)- तदा य मानं किम्?

१४. छेअ कोछे (९०°-अ) – य कोस्प (९०°-अ) = १

अत्रापि य मानं किम्?

(५) निम्नलिखितप्रश्नाः साध्यन्ताम्–

शालिनी–(१) कोज्या ३ अ = ज्या ७ अ, तदा अ मानं किम्?

कोज्या ३ अ = ज्या ७ अ

या, ज्या (९०° –३अ) = ज्या ७ अ

या, ९०° – ३ अ = ७ अ

∴ १० अ = ९०°, ∴ अ = ९° उत्तरम्।

(२) स्प अ = कोस्प ३ अ, तदा अ मानं किम्?

स्प अ = कोस्प ३ अ

कोस्प (९०° – अ) = कोस्प ३ अ

∴ ९०° – अ = ३ अ

या, ४ अ = ९०° $\therefore$ अ $= \dfrac{९०°}{४} = २२\dfrac{१°}{४}$ उत्तरम्।

(३) छे ५ अ = कोछे अ, तदा अ मानं किम्?

छे ५ अ = को छे अ

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

को छे (९०° – ५ अ) = को छे अ

∴ ९०° – ५ अ = अ, या ६ अ = ९०°

$$\therefore \text{अ} = \frac{९०°}{६} = १५° \text{ उत्तरम्}$$

(४) ज्या अ स्प (९०° – अ) छे (९०° – अ) = कोस्प अ

वा. प. – ज्या अ. स्प (९०° – अ). छे (९०° – अ)

= ज्या अ. कोस्पअ. को छे अ.

$$= \text{ज्या अ} \times \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्या अ}} \times \frac{१}{\text{ज्याअ}} = \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$

= कोस्प अ, अत उपपन्नम्।

(५) कोज्या अ. स्प अ. स्प (९०° – अ). को छे (९०° – अ) = १

वा. प.– कोज्याअ. स्प अ. स्प (९०° – अ) को छे (९०° – अ)

= कोज्या अ. स्प अ. कोस्प अ. छे अ

$$= \text{कोज्याअ} \times \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्याअ}} \times \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} \times \frac{१}{\text{कोज्याअ}} = १$$

उपपन्नम्।

(६) ज्या अ. कोज्या (९०° – अ)+ कोज्या अ. ज्या (९०° – अ)=१

वा. पः- ज्या अ. कोज्या (९०°-अ)+कोज्या अ ज्या (९०° –अ)

= ज्या अ ज्या अ + कोज्या अ कोज्या अ

= ज्या^{२} अ + कोज्या^{२} अ = १, अत उपपन्नम्।

(७) कोछे^{२} (९०° – अ) = १ + ज्या^{२} अ कोछे^{२} (९०° – अ)

द. पः- १ + ज्या^{२} अ. कोछे^{२} (९०° – अ)

= १ + ज्या^{२} अ छे^{२} अ

$$= १ + \text{ज्या}^२ \text{ अ} \times \frac{१}{\text{कोज्या}^२\text{अ}} = १ + \frac{\text{ज्या}^२ \text{ अ}}{\text{कोज्या}^२ \text{ अ}}$$

= १ + स्प^२ अ = छे^{२} अ = को छे^{२} (९०° – अ)

∴ द. प. = वा. प., उपपन्नम्।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(८) ज्या अ कोस्प अ कोस्प (९०° – अ) छे (९०° – अ) = १.

वा. पः- ज्या अ कोस्प अ कोस्प (९०° – अ) छे (९०° – अ)

$$= \text{ज्या अ} \times \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} \times \text{स्प अ} \times \text{कोछे अ}$$

$$= \text{ज्याअ} . \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} \times \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्याअ}} \times \frac{१}{\text{ज्याअ}} = १,$$ अत उपपन्नम्।

(९) स्प (९०°–अ) + कोस्प (९०°–अ) = कोछे अ.को छे (९०°–अ)

वा. पः- स्प (९०° – अ) + कोस्प (९०° – अ)

= कोस्प अ + स्प अ

$$= \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्या अ}} + \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ} + \text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्या अ कोज्यअ}}$$

$$= \frac{१}{\text{ज्या अ कोज्या अ}} = \text{को छे अ. छे अ.}$$

= को छे अ को छे (९०° – अ), इत्युपपन्नम्।

(१०) $$\frac{\text{ज्या } (९०° - \text{अ})}{\text{छे } (९०° - \text{अ})} \times \frac{\text{स्प } (९०° - \text{अ})}{\text{कोज्याअ}} = \text{कोज्या अ}$$

वा. पः- $$\frac{\text{कोज्याअ}}{\text{कोछेअ}} \times \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोज्या अ}}$$

$$= \text{ज्या अ} \times \text{कोज्या अ} \times \frac{१}{\text{कोज्या अ}} \times \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$

= कोज्या अ, उपपन्नम्।

(११) $$\frac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ स्प}^{२}\text{अ}}{\text{कोस्प } (९०° - \text{अ})} \times \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोज्याअ}} = \text{कोज्या अ}$$

वा. पः- $$\frac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ स्प}^{२}\text{अ}}{\text{स्प अ}} \times \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोज्याअ}}$$

$$= \text{कोज्या अ} \times \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

= कोज्या अ, उपपन्नम्।

(१२) $\frac{\text{कोछे}^2\text{अ स्प}^2\text{अ}}{\text{कोस्प (९०°–अ)}} \times \frac{\text{कोस्प अ}}{\text{छे}^2\text{ अ}} = \text{छे}^2\text{ (९०° – अ) – १}$

वा. पः- $\frac{\text{कोछे}^2\text{ अ स्प}^2\text{अ}}{\text{कोस्प (९०°–अ)}} \times \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{छे}^2\text{ अ}}$

$= \frac{\text{कोछे}^2\text{ अ स्प}^2\text{अ}}{\text{स्प अ}} \times \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{छे}^2\text{अ}}$

$= \frac{\text{१}}{\text{ज्या}^2\text{अ}} \times \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} \times \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्या अ}} \times \text{कोज्या}^2\text{ अ,}$

$= \frac{\text{कोज्या}^2\text{ अ}}{\text{ज्या}^2\text{ अ}} = \text{कोस्प}^2\text{ अ} = \text{कोछे}^2\text{अ –१}$

$= \text{छे}^2$ (९० ° – अ) – १. इत्युपपन्नम्।

(१३) यदि ज्या (९०°–अ) कोस्प (९०°–अ) × य = कोज्या (९०°–अ),

तदा य मानं किम्?

या, कोज्या अ स्प अ × य = ज्या अ

या, कोज्या अ $\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$ × य = ज्या अ

या ज्या अ × य = ज्या अ

$\therefore$ य = $\frac{\text{ज्याअ}}{\text{ज्याअ}}$ = १ उत्तरम्।

(१४) छे अ को छे (९०° – अ)–य × कोस्प (९०° – अ) = १

अत्रापि य मानं किम्?

छे अ को छे (९०° – अ) – य × कोस्प (९०° – अ) = १

या, छे अ छे अ – य × स्प अ = १

या छे^2 अ – य × स्प अ = १

या, य × स्प अ = छे^2–१ = स्प^2 अ

$\therefore$ य = $\frac{\text{स्प}^2\text{अ}}{\text{स्प}^2\text{अ}}$ = स्प अ, उपपन्नम्।

इति।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

तत्र तावत् सुलभं त्रैकोणमितिकसमीकरणं प्रदर्श्यते–

उ. (१) ४ कोज्या अ = ३ छे अ अत्र अ मानं किम्।

अत्र छेदनरेखायाः कोटिज्यास्वरूपे परिवर्त्तनेन–

$$४कोज्याअ = \frac{३}{कोज्याअ} \quad \therefore ४ कोज्या^{२}अ = ३,$$

$$\therefore कोज्याअ \pm \frac{\sqrt{३}}{२} वा, कोज्याअ = \frac{\sqrt{३}}{२} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (१)$$

$$कोज्याअ = - \frac{\sqrt{३}}{२} \; . \; . \; . \; . \; .(२)$$

$$यतः कोज्या ३०^{\circ} = \frac{\sqrt{३}}{२} \quad \therefore (१) एतेन अ = ३०^{\circ},$$

ऋणमानस्यापि ज्ञानमग्रे प्रदर्शितं भविष्यति।

उ. (२) ३ $छे^{२}$ अ = ८ स्पअ – २ इति साध्यताम्

यतः $छे^{२}$ अ=१+ $स्प^{२}$अ अतः ३ (१+ $स्प^{२}$अ) = ८स्पअ–२,

वा,३ $स्प^{२}$अ – ८ स्पअ + ५ = ० इदं तु एकवर्णमध्यमाहरणम्

तेन गुण्यगुणावयवपरिवर्त्तनगणितबलेन (स्पअ – १) (३ स्पअ –५)

= ०, ∴ स्पअ– १ = ० ... (१) वा, ३ स्पअ – ५ = ०...(२)

(१)...अस्मात् स्पअ = १ ∴ अ = ४५°

(२)...अस्मात् स्पअ = $\frac{५}{३}$ अत्र सारिणीतो कोणमानं ज्ञातुं शक्यते

उ. (३) ३ स्पअ + कोस्पअ = ५ कोछेअ अत्र अ मानं साध्यताम्

$$\frac{३ ज्याअ}{कोज्याअ} + \frac{कोज्याअ}{ज्याअ} = \frac{५}{ज्याअ}$$

वा, ३ $ज्या^{२}$अ + $कोज्या^{२}$अ = ५ कोज्याअ,

वा ३ (१–$कोज्या^{२}$अ) + $कोज्या^{२}$अ = ५ कोज्याअ,

२ $कोज्या^{२}$अ +५कोज्याअ–३ = ०, गुण्यगुणावयवरूपे परिवर्त्तनेन

वा, (२कोज्याअ – १) (कोज्याअ + ३) = ०,

∴ २ कोज्याअ– १ = ० . . . . (१)

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

वा, कोज्याअ + ३ = ० . . . . . . (२)

(१) अस्मात् कोज्याअ = $\frac{१}{२}$ अतः अ = ६०°

(२) अस्मात् कोज्याअ = – ३, इदं मानं त्याज्यमसम्भवत्वात्।

(६) निम्नलिखितसमीकरणेषु अ मानं साध्यताम्।

१. ४ ज्याअ = ३ कोछेअ

२. छे^{२} अ = २स्प^{२}अ

३. कोस्प^{२}अ + कोछे^{२} अ = ३

४. २कोज्या^{२}अ + ४ ज्या^{२}अ = ३

५. कोज्या^{२}अ – ज्या^{२}अ = २ – ५कोज्याअ

६. कोस्पअ + स्पअ = २ छेअ

७. ४कोछेअ + २ ज्याअ = ९

८. स्पअ – कोस्पअ = कोछेअ

९. २ ज्याअ स्पअ + १ = स्पअ + २ ज्याअ

१०. ६ स्पअ– ५$\sqrt{३}$ छे अ + १२ कोस्पअ = ०

११. ५ स्पअ + ६ कोस्पअ = ११

१२. छे^{२} अ + स्प^{२}अ = ३ स्पअ

शालिनी–(१) ४ ज्याअ = ३ कोछे अ

या, ४ज्याअ = ३ $\frac{१}{ज्याअ}$

या, ४ ज्या^{२}अ = ३, ∴ ज्या अ = $\frac{३}{४}$

∴ ज्या अ = $\frac{\sqrt{३}}{\sqrt{४}}$ = $\frac{\sqrt{३}}{२}$ = ज्या ६०°

∴ अ = ६०° उत्तरम्।

(२) छे^{२} अ = २ स्प^२ अ

या, छे^{२} अ = २(छे^{२} अ–१)

या, छे^{२} अ = २ छे^{२} अ – २.

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

या, २ छे^{२} अ – छे^{२} अ = २.

या, छे^{२} अ = २., ∴ छे अ = $\sqrt{२}$ = छे ४५°

∴ अ = ४५° उत्तरम्।

(३) कोस्पे^{२} अ + को छे^{२} अ = ३.

या, कोस्पे^{२} अ + १ + कोस्पे^{२}अ = ३.

या, २ कोस्पे^{२} अ = ३–१ = २.

या, कोस्पे^{२}अ = १, ∴ कोस्प अ = १.

= कोस्प ४५°, ∴ अ = ४५° उत्तरम्।

(४) २ कोज्या^{२} अ + ४ ज्या^{२}अ = ३.

या, २(१ – ज्या^{२}अ) + ४ ज्या^{२} अ = ३.

या, २–२ज्या^{२}अ + ४ ज्या^{२} अ = ३.

या, २ ज्या^{२}अ = १, ∴ ज्या^{२} अ = $\frac{१}{२}$

∴ ज्याअ = $\frac{१}{\sqrt{२}}$ = ज्या ४५°,

∴ अ = ४५° उत्तरम्।

(५) कोज्या^{२}अ – ज्या^{२} अ = २–५ कोज्याअ.

या, कोज्या^{२} अ– १ + कोज्या^{२} अ = २–५ कोज्याअ.

या, २ कोज्या^{२} अ – १ = २–५ कोज्याअ

या, २ कोज्या^{२}अ + ५ कोज्याअ – ३ = ०

या, २ कोज्या^{२} अ + ६ कोज्या अ – कोज्या अ – ३ = ०

या, २ कोज्याअ (कोज्या अ + ३) –१ (कोज्याअ + ३) = ०

या, (२कोज्याअ–१) (कोज्याअ + ३) = ०

यदि २ कोज्याअ – १ = ०, तदा २ कोज्याअ = १.

∴ कोज्याअ = $\frac{१}{२}$ = कोज्या ६०°, ∴ अ = ६०°.......(१)

पुनः कोज्याअ + ३ = ०, तदा कोज्या अ = – ३.......(२)

अस्य मानं ऋणात्मकमतः कोज्या ६०° = $\frac{१}{२}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

∴ अ = ६०° उत्तरम्

(६) कोस्प अ + स्पअ = २ छेअ.

या, $\frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्याअ}} + \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} = \frac{२}{\text{कोज्याअ}}$

या, $\frac{\text{कोज्या}^{२}\text{अ}+\text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्याअ. कोज्याअ}} = \frac{२}{\text{कोज्याअ}}$

या, $\frac{१}{\text{ज्याअ कोज्याअ}} = \frac{२}{\text{कोज्याअ}}$

या, २ ज्याअ = १, ∴ ज्याअ = $\frac{१}{२}$ = ज्या ३०°

∴ अ = ३०°

(७) ४ कोछेअ + २ ज्याअ = ९

या, ४ $\frac{१}{\text{ज्याअ}}$ + २ ज्याअ = ९

या, $\frac{४ + २\ \text{ज्या}^{२}\text{अ}}{\text{ज्याअ}}$ = ९

या, ४ + २ ज्या^{२}अ = ९. ज्या अ

या, २ ज्या^{२} अ − ९ ज्याअ + ४ = ०

या, २ ज्या^{२} अ − ८ ज्याअ − ज्याअ + ४ = ०

या, २ ज्याअ (ज्याअ−४) −१ (ज्याअ −४)= ०

या, (२ज्याअ −१) (ज्याअ−४) = ०

यदि २ ज्याअ −१ = ०, तदा ज्याअ = $\frac{१}{२}$ = ज्या ३०°

पुनः ज्याअ − ४ = ० तदा ज्याअ = ४,

∴ ज्या ३०° = $\frac{१}{२}$, ∴ अ = ३०° उत्तरम्।

(८) स्पअ − कोस्पअ = कोछे अ.

या, $\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} - \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = \frac{१}{\text{ज्याअ}}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

या, $\frac{\text{ज्या}^2\text{अ}-\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ ज्याअ}} = \frac{१}{\text{ज्याअ}}$

या, $\frac{\text{ज्या}^2-\text{कोज्या}^2\text{अ}}{\text{कोज्याअ}} = १$

या, ज्या^{2}अ–कोज्या^{2}अ = कोज्याअ

या, १–कोज्या^{2}अ–कोज्या^{2}अ = कोज्या अ

या, २ कोज्या^{2} अ + कोज्या अ – १ = ०

या, २ कोज्या^{2} अ + २ कोज्या अ – कोज्या अ – १ = ०

या, २ कोज्या अ. (कोज्या अ +१) – १ (कोज्या अ+१) = ०

या, (२कोज्या अ – १) (कोज्या अ + १) = ०

यदि २ कोज्याअ – १ = ०, तदा २ कोज्याअ = १

∴ कोज्या अ = $\frac{१}{२}$ = ६०° उत्तरम्।

(९) २ ज्याअ स्प अ + १ = स्प अ + २ ज्याअ

या, २ ज्याअ × $\frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}}$ + १ = $\frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्याअ}}$ + २ ज्याअ

या, २ ज्या^{2}अ + कोज्याअ = ज्याअ + २ ज्याअ. कोज्याअ

या, २ ज्या^{2}अ–२ ज्याअ कोज्याअ – ज्याअ + कोज्याअ = ०

या, २ ज्याअ (ज्याअ–कोज्याअ) –१ (ज्या अ– कोज्याअ) =०

या, (२ज्याअ–१) (ज्याअ – कोज्याअ) = ०

यदि २ ज्याअ – १ = ०, तदा २ ज्याअ = १

∴ ज्याअ = $\frac{१}{२}$ = ज्या ३०°..........(१)

यदि ज्या अ– कोज्याअ = ०

ज्याअ = कोज्याअ..........(२)

प्रथमसमीकरणात्–

ज्या ३०° = $\frac{१}{२}$, ∴ अ = ३०° उत्तरम्

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

द्वितीय समीकरणात्–

$$\text{ज्या } ४५^\circ = \text{कोज्या } ४५^\circ = \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$\therefore$ अ = ४५° उत्तरम्।

(१०) ६ स्प अ – ५$\sqrt{३}$ छे अ + १२ कोस्प अ = ०,

$$\text{या, } \frac{६ \text{ ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} - ५\sqrt{३}\,\frac{१}{\text{कोज्याअ}} + \frac{१२ \text{ कोज्याअ}}{\text{ज्याअ}} = ०$$

या, ६ ज्या^{२}अ – ५ $\sqrt{३}$ ज्याअ + १२ कोज्या^{२}अ = ०

या, ६ ज्या^{२}अ – ५ $\sqrt{३}$ ज्याअ + १२ (१–ज्या^{२}अ) = ०

या, ६ ज्या^{२}अ – ५ $\sqrt{३}$ ज्याअ + १२ – १२ ज्या^{२}अ = ०

या, – ६ ज्या^{२}अ – ५ $\sqrt{३}$ ज्याअ + १२ = ०

या ६ ज्या^{२}अ + ५ $\sqrt{३}$ ज्या अ – १२ = ०

कल्प्यते ज्या अ = य, तदा–

६ य^२ + ५$\sqrt{३}$ य – १२ = ०

६ य^२ + ८ $\sqrt{३}$ य – ३ $\sqrt{३}$ य – १२ = ०

२ $\sqrt{३}$ य ($\sqrt{३}$ य + ४) – ३ ($\sqrt{३}$ य + ४) = ०

(२ $\sqrt{३}$ य – ३) ($\sqrt{३}$ य + ४) = ०

$$\therefore \text{य} = \frac{३}{२\sqrt{३},}\ ,\ \text{य} = \frac{-४}{\sqrt{३}}\ \ldots\ldots\text{(असंभवम्)}$$

$$= \frac{\sqrt{३}}{२} = ६०^\circ$$

$\therefore$ अ = ६०° उत्तरम्।

(११) ५ स्पअ + ६ कोस्प अ = ११

$$\text{या, } ५ \text{ स्पअ} + ६\,\frac{१}{\text{स्पअ}} = ११$$

या, ५ स्प^{२}अ + ६ = ११ स्पअ

या, ५ स्प^{२}अ – ११ स्पअ + ६ = ०

या, ५ स्प^{२}अ – ५ स्पअ – ६ स्पअ + ६ = ०

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

या, ५ स्पअ (स्पअ - १) - ६ (स्पअ - १) = ०

या, (५ स्पअ - अ ६) (स्प अ - १) =०

यदि ५ स्प अ - ६ = ०, तदा ५ स्प अ = ६

$\therefore$ स्पअ = $\frac{६}{५}$ . . . .(१)

पुनः स्पअ - १ = ० तदा स्पअ = १

= स्प ४५° $\therefore$ अ = ४५° उत्तरम्।

(१२) छे^{२} अ + स्प^{२}अ = ३ स्पअ

या, १ + स्प^{२}अ + स्प^{२}अ = ३ स्पअ

या, १ + २ स्प^{२}अ = ३ स्पअ

या, २ स्प^{२}अ - ३ स्पअ + १ = ०

या, २ स्प^{२}अ - २ स्पअ - स्पअ + १ = ०

या, २ स्पअ (स्पअ - १) -१ (स्पअ - १) = ०

या, (२स्प अ-१) (स्प अ- १) = ०

यदि २ स्पअ- १ = ०, तदा २ स्पअ = १

$\therefore$ स्पअ = $\frac{१}{२}$ . . . . . .(१)

पुनः यदि स्पअ - १ = ०, तदा स्पअ = १

= स्प ४५°, $\therefore$ अ = ४५° उत्तरम्

।।इति।।

जात्यत्रिभुजगणितसाधनम्।

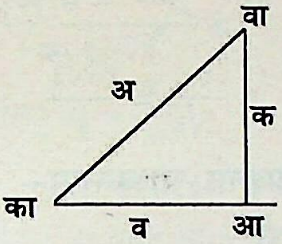
प्रत्येकस्मिन् त्रिभुजे षडवयवा भवन्ति, त्रयो भुजास्तावन्त एव कोणाश्चेति। तत्र कोणाः आ, वा, का एभिः तत्सम्मुखभुजाश्च अ, व क एभिर्द्योत्यन्ते, अत्रेदं स्मर्त्तव्यं यदेषां अ, व, क भुजानां संख्यात्मकानि मानानि सन्ति। क्षेत्रमितित इदं स्फुटं यदेषु षडवयवेषु त्रयाणां ज्ञानात् शेषाणां त्रयाणामवयवानां ज्ञानं सुखेन भवति, यदि तेषु त्रिषु एकोऽवश्यमेव भुजो भवेत्। अनयैव रीत्या त्रयाणामवयवानां ज्ञानात्

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

त्रिकोणमितावपि शेषावयवत्रयाणां ज्ञानं कर्त्तुंशक्यते, एतादृग्गणितं च त्रिभुजगणितमिति शब्देन व्यवह्रियते। यस्य कस्यापि त्रिभुजगणितस्य साधारणप्रकारः अग्रे वक्ष्ये। अत्र तु केवलं जात्यत्रिभुजमेवाश्रित्य गणितं प्रदर्श्यते।

रेखागणितत इदं स्फुटं यत जात्यत्रिभुजे भुजद्वयज्ञानात् तृतीयभुजज्ञानं सुखेनैव भवति, तथा च समकोणभिन्नस्य कस्यापि न्यूकोणस्य ज्ञानात् द्वितीयन्यूनकोणः तस्य कोटि र्भवति, अतो जात्यत्रिभुजे वस्तुतो द्विविधैव स्थितिर्विद्यते (१) कयोरपि भुजयोर्ज्ञानात् (२) तथा यदैको भुजः कोणश्चैको ज्ञातो भवेत्। तत्र प्रथमा स्थितिर्यथा कयोरपि भुजयोर्ज्ञानात्क्रियते।



कल्प्यते आवाका जात्यत्रिभुजं यत्र आकोणः समकोणः तथा द्वौ ज्ञात-भुजौ व, क तदा $अ^२ = व^२ + क^२$

तथा कोज्याका $= \frac{व}{अ}$, तेन

वा = ९०° − का, तस्मात् का, वा कोणे ज्ञाते भवतः।

उ. १ यदि आ = ९०°, व = २०, अ = ४० अत्र त्रिभुजमानं साध्यम्

अत्र $क^२ = अ^२ - व^२ = १६०० - ४०० = १२०० \therefore क = २० \sqrt{३}$

$$तथा \quad \frac{व}{अ} = \frac{२०}{४०} = \frac{१}{२} = कोज्याका \therefore का = ६०°$$

$\therefore$ वा = ९०° − ६०° = ३०°

त्रैकोणमितिकमानानि बहुधा प्रकारान्तरेणापि साध्यानि भवन्ति

$$यथा\ कोज्याका = \frac{व}{अ} = \frac{२०}{४०} = \frac{१}{२}, \quad \therefore का = ६०°$$

तथा वा ९०° − का = ९०° − ६०° = ३०° तथा

$$कोज्यावा = \frac{क}{अ} = \frac{क}{४०} = कोज्या\ ३०° = \frac{\sqrt{३}}{२} \therefore क = २० \sqrt{३}$$

(२) द्वितीया स्थितिर्यथा यत्रैको न्यूनकोणो भुजश्चैको ज्ञातोऽस्ति तत्र

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

त्रिभुजसाधनम्। यथा कल्प्यते व भुजो ज्ञातोऽस्ति तथा काकोणश्च

तदा वा=९०° –का, $\frac{अ}{व}$ = छेका, $\frac{क}{व}$ = स्पका एभ्यः वा, अ, क

ज्ञाता भवन्ति।

उ. १. यदि वा = ३०°, आ = ९०°, क = ५ तत्र त्रिभुजं साध्यताम्

अत्र का = ९०° – वा = ९०° –३०° = ६०°

तथा $\frac{व}{५}$ = स्प३०°, ∴ व = ५ स्प ३०° = $\frac{५}{\sqrt{३}}$ =

$\frac{५}{\sqrt{३}} \times \frac{\sqrt{३}}{\sqrt{३}} = \frac{५\sqrt{३}}{३}$ पुनः $\frac{अ}{५}$ = छे ३०°,

∴ अ = ५ छे३०° = ५ × $\frac{२}{\sqrt{३}} = \frac{१०}{\sqrt{३}} = \frac{१०\sqrt{३}}{३}$

(७) अत्राभ्यासार्थं केचित्प्रश्नाः साध्यन्ताम्–

१. का = ९०°, व = १२, अ= ४$\sqrt{३}$

२. अ = ६०, व = ३०, आ = ९०°

३. व = क = २, आ ९०°

४. आ = ३०°, वा = ६०°, व = २०$\sqrt{३}$

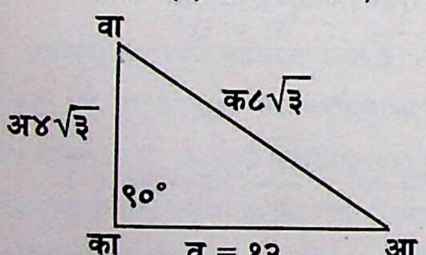
५. वा = का = ४५°, क = ४

६. २ वा = का = ६०°, अ = ८

७. यदि का = ९०°, आ ३८° १९′, क ५० तथा अ मानं किम्

यदि ज्या ३८° १९′ = .६२

शालिनी–(१) L का = ९०°, व = १२, अ = ४$\sqrt{३}$



∵ क² = अ² + ब²

= (४$\sqrt{३}$)² + (१२)²

= ४८ + १४४ = १९२

∴ क = $\sqrt{१९२}$ = ८$\sqrt{३}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

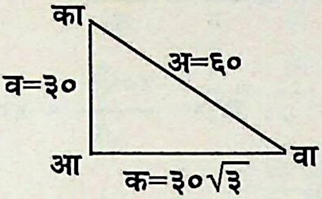
$$\text{कोज्या आ} = \frac{\text{व}}{\text{क}} = \frac{१२}{८\sqrt{३}} = \frac{\sqrt{३}}{२} = \text{कोज्या } ३०^\circ$$

$\therefore$ आ $= ३०^\circ$

पुनः वा $= ९०^\circ -$ आ $= ९०^\circ - ३०^\circ = ६०^\circ$

$\therefore$ क $= ८\sqrt{३}$, आ $= ३०^\circ$, वा $= ६०^\circ$ उत्तरम्।

(२) अ = ६०, व = ३०, आ = ९०°



$$\text{क} = \sqrt{\text{अ}^२ - \text{व}^२}$$
$$= \sqrt{६०^२ - ३०^२}$$
$$= \sqrt{३६०० - ९००} = \sqrt{२७००} = ३०\sqrt{३}$$

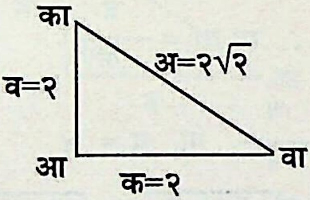
$$\therefore \text{कोज्या का} = \frac{\text{व}}{\text{अ}} = \frac{३०}{६०} = \frac{१}{२} = \text{कोज्या } ६०^\circ$$

$\therefore$ का $= ६०^\circ$

$\therefore$ वा $=$ आ $-$ का $= ९०^\circ - ६०^\circ = ३०^\circ$

$\therefore$ क $= ३०\sqrt{३}$, आ $= ६०^\circ$, वा $= ३०^\circ$ उत्तरम्

(३) व = क = २, आ = ९०°



$\because$ व $=$ क $= २$

$$\therefore = \text{अ} = \sqrt{\text{व}^२ + \text{क}^२}$$
$$= \sqrt{४ + ४} = \sqrt{८} = २\sqrt{२}$$

$$\text{कोज्या वा} = \frac{\text{क}}{\text{अ}} = \frac{२}{२} = \frac{१}{\sqrt{२}} = \text{कोज्या } ४५^\circ$$

$\therefore$ वा $= ४५^\circ$

$\therefore$ का $=$ आ $-$ व $= ९०^\circ - ४५^\circ = ४५^\circ =$ वा, उत्तरम्

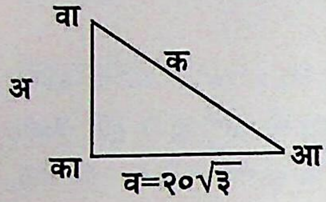
(४) आ $= ३०^\circ$, वा $= ६०^\circ$, व $= २०\sqrt{३}$

$\because$ का $=$ आ $+$ वा $= ३०^\circ + ६०^\circ = ९०^\circ$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{कोज्या आ} = \frac{\text{व}}{\text{क}}$$



$$\text{या, कोज्या } ३०^\circ = \frac{\text{व}}{\text{क}}$$

$$\text{या, } \frac{\sqrt{३}}{२} = \frac{२०\sqrt{३}}{\text{क}}$$

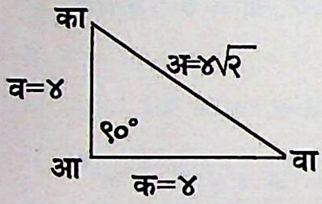
$$\therefore \text{क} = \frac{४०\sqrt{३}}{\sqrt{३}} = ४०$$

$$\text{एवञ्च अ} = \sqrt{(४०)^२ - (२०\sqrt{३})^२}$$

$$= \sqrt{१६०० - १२००} = \sqrt{४००} = २०$$

अतः का = ९०°, अ = २०°, क = ४० उत्तरम्

(५) वा = का = ४५°, क = ४



$$\because \text{आ} = \text{का} + \text{वा}$$

$$= ४५^\circ + ४५^\circ = ९०^\circ$$

$$\therefore \text{स्प वा} = \frac{\text{व}}{\text{क}}$$

$$\text{या स्प } ४५^\circ = \frac{\text{व}}{\text{क}} \quad \therefore १ = \frac{\text{व}}{४}, \text{ या, व} = ४$$

$$\therefore \text{अ} = \sqrt{\text{क}^२ + \text{व}^२} = \sqrt{४^२ + ४^२} = \sqrt{१६ + १६}$$

$$= \sqrt{३२} = ४\sqrt{२}$$

$$\therefore \text{आ} = ९०^\circ, \text{व} = ४, \text{अ} = ४\sqrt{२}, \text{ उत्तरम्}$$

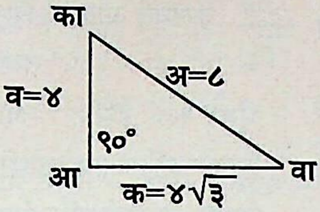
(६) २ वा = का = ६०°, अ = ८

२ वा = ६०°

∴ वा = ३०°

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2



का = ६०°

∴ आ − ६०° + ३०° = ९०°

$$\text{कोज्या वा} = \frac{\text{क}}{\text{अ}}, \text{ या कोज्या } ३०° = \frac{\text{क}}{८}$$

$$\text{या } \frac{\sqrt{३}}{२} = \frac{\text{क}}{८}, \therefore \text{क} = \frac{८ \times \sqrt{३}}{२} = ४\sqrt{३}$$

$$\therefore \text{व} = \sqrt{\text{अ}^{२} - \text{क}^{२}}$$

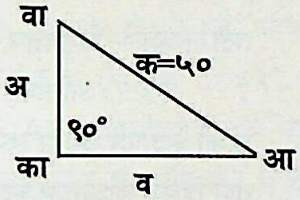
$$= \sqrt{८^{२} - (४\sqrt{३})^{२}} = \sqrt{६४ - ४८}$$

$$= \sqrt{१६} = ४$$

अतः आ = ९०°, क = ४√३, व = ४, उत्तरम्

(७) यदि का = ९०°, आ = ३८°१९′, क = ५०

तदा अ मानं किम्?



यदि ज्या ३८°१९′ = .६२

$$\text{ज्या } ३८°१९' = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$$

$$\text{या, } .६२ = \frac{\text{अ}}{५०}$$

या, अ = ५० x .६२ = ३१.००

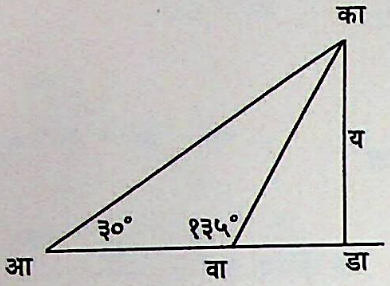
∴ अ = ३१ उत्तरम्

।।इति।।

पूर्वोक्तप्रकारेण जात्यत्रिभुजगणितं सुलभमेव। अथ यस्मिन्कस्मिन्नप्युदाहरणे जात्यत्रिभुजद्वयाभ्यां त्रिभुजसाधनं कर्त्तुं शक्यते तद्यथा–

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2



कल्प्यते आवाका त्रिभुजे आ = ३०°, वा = १३५° तथा आवा भुजः १०० हस्ताः तदा का विन्दुतः वर्धितआवारेखोपरि लम्बः साध्यः। कल्प्यते वर्धितआवारेखोपरि काडा लम्बः = य

तदा कावाडा = १८०° − १३५° = ४५°, ∴ वाडा = काडा = य

तथा आडाका जात्यत्रिभुजे $\frac{\text{काडा}}{\text{आडा}}$ = स्प डाआका = स्प ३०°

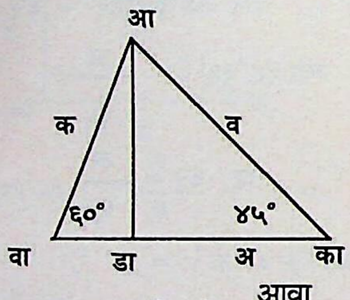
अर्थात् $\frac{\text{य}}{\text{य}+१००} = \frac{१}{\sqrt{३}}$, ∴ य$\sqrt{३}$ = य + १००,

य ($\sqrt{३}$ − १) = १००, ∴ य = $\frac{१००}{\sqrt{३}-१} = \frac{१००(\sqrt{३}+१)}{३-१}$

∴ य = ५० ($\sqrt{३}$ + १)

∴ अतोऽभीष्टप्रमाणं ५० ($\sqrt{३}$ + १) हस्ताः

ततो लम्बज्ञानेन त्रिभुजज्ञानं सरलम्।



(उ.२) आवाका त्रिभुजे वाका रेखोपरि आडा लम्बः = य तदा त्रिभुजं साध्यताम् यत्र का, वा कोणौ क्रमशः ४५°, ६०° तुल्यौ तथा आडा = ५

अवाडा जात्यत्रिभुजे $\frac{\text{आवा}}{\text{आडा}}$ = कोछेआवाडा,

∴ आवा = आडाकोछेआवाडा = ५ कोछे ६०°

$= ५ \times \frac{२}{\sqrt{३}} = \frac{१०}{\sqrt{३}} = \frac{१०\sqrt{३}}{३}$

तथा $\frac{\text{वाडा}}{\text{आडा}}$ = कोस्पआवाडा, ∴ वाडा = आडाकोस्पआवाडा

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$= ५$ कोस्प $६०° = \frac{५}{\sqrt{३}} = \frac{५\sqrt{३}}{३}$, आडाका जात्यात्रिभुजे

$\angle$ डाआका $= ४५° = \angle$ डाकाआ, $\therefore$ डाका $=$ डाआ $= ५$

एवम् वाका $=$ काडा $+$ वाडा $= ५ + \frac{५\sqrt{३}}{३} = \frac{१५+५\sqrt{३}}{३}$

तथा $\frac{\text{आका}}{\text{आडा}}$ = कोछेआकाडा,

$\therefore$ आका = आडाकोछेआकाडा $= ५$ कोछे $४५° = ५\sqrt{२}$

सर्वान्त्ये $\angle$ वाआका $= १८०° - ६०° - ४५° = ७५°$ एवम्

अ $= \frac{१५ + ५\sqrt{३}}{३}$, व $= ५\sqrt{२}$, क $= \frac{१९\sqrt{३}}{३}$ आ $= ७५°$

(८) अभ्यासार्थ प्रश्नाः।

१: आवाका त्रिभुजं तथा आकावर्धितभुजोपरि वाडा लम्बः तदा वाडा मानं साध्यताम् यदि आ = ३०°, का = १२०°, आका = २०

२. आवाका त्रिभुजे यदि आका भुजोपरि वाडा लम्बः तदा अ, क माने के? यदि आ = ३०°, का = ४५°, वाडा = १०

३. पकर जात्यत्रिभुजे यदि कविन्दोस्तत्संमुखभुजोपरि लम्बः कड तदा कर्णस्य खण्डमाने के, यदि कर = ८, $\angle$ करप = ६०°, $\angle$ कपर = ३०°

४. आवाका त्रिभुजे, वा, का कोणौ = क्रमात् ४५°, १२०° तुल्यौ, तत्र यदि अ = ४०, तदा आविन्दोः वर्धितवाकारेखोपरि पातितलम्बस्य प्रमाणं किम्?

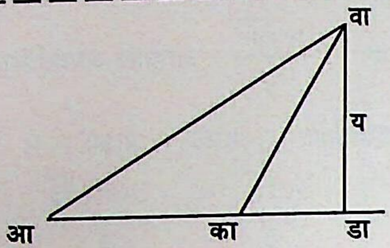
५. रपस त्रिभुजे रस रेखोपरि पक लम्बः तदा रस मानं किम् यदि पक = ३६, $\angle$ रपक = ३०°, $\angle$ सपक = ६०°

(८) अभ्यासार्थ प्रश्नाः (साधितमत्र)

शालिनी–१. आ वा का त्रिभुजं तथा आका वर्धितभुजोपरि वा डा लम्बः, तदा वा डा मानं साध्यताम्? यदि आ = ३०°, का = १२०°, आ का = २०°।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2



कल्पय्ते वर्धितरेखोपरि

वा डा लम्बः = य

∠वा का डा=१८०° − १२०°=६०°

$$\text{तदा स्प } ६०° = \frac{\text{वा डा}}{\text{का डा}} = \frac{\text{य}}{\text{का डा}}$$

$$\text{या,} \sqrt{३} = \frac{\text{य}}{\text{का डा}} \quad , \therefore \text{ का डा} = \frac{\text{य}}{\sqrt{३}}$$

$$\text{पुनः } \Delta \text{ आ डा वा, स्प } ३०° = \frac{\text{वा डा}}{\text{आ डा}}$$

$$\text{या,} \quad \frac{१}{\sqrt{३}} = \frac{\text{य}}{२० + \frac{\text{य}}{\sqrt{३}}}$$

$$\text{या,} \quad \frac{१}{\sqrt{३}} = \frac{\text{य} \sqrt{३}}{२०\sqrt{३} + \text{य}}$$

$$\text{या, } ३ \text{ य} = २० \sqrt{३} + \text{य}$$

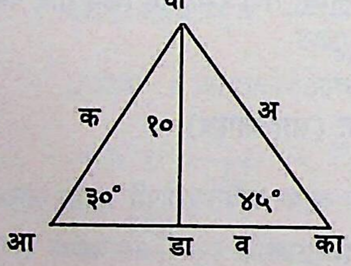
$$\text{या, } २ \text{ य} = २० \sqrt{३}$$

$$\therefore \text{ य} = \frac{२० \sqrt{३}}{२} = १० \sqrt{३} = १० \times १.७३२ = १७.३२$$

उत्तरम्।

(२) आ वा का त्रिभुजे यदि आ का भुजोपरि वा डा लम्बः तदा अ, क माने के?

यदि आ = ३०°, का = ४५°, वा डा = १०°.



Δ आ वा डा →

$$\text{ज्या आ} = \frac{\text{वा डा}}{\text{आ वा}}$$

$$\text{या, ज्या } ३०° = \frac{\text{वा डा}}{\text{आ वा}}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

या, $\frac{१}{२} = \frac{१०}{\text{आ वा}}$

$\therefore$ आ वा = क = २०

पुनः का वा डा त्रिभुजे–

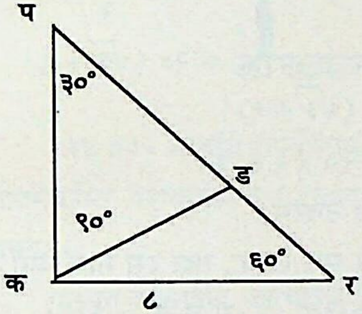
ज्या ४५° = $\frac{\text{वा डा}}{\text{का वा}}$

या, $\frac{१}{\sqrt{२}} = \frac{१०}{\text{का वा}}$, $\therefore$ का वा = १० $\sqrt{२}$

$\therefore$ अ = १० × १.४१४ = १४.१४ उत्तरम्।

(३) प क र जात्यत्रिभुजे यदि क विन्दोस्तत्संमुखभुजोपरि लम्बः क ड तदा कर्णस्य खण्डमाने के?

यदि क र = ८, ∠ क र प = ६०° ∠क प र = ३०°



Δ क ड रः →

कोज्या ६०° = $\frac{\text{ड र}}{\text{क र}}$

या, $\frac{१}{२} = \frac{\text{ड र}}{८}$

$\therefore$ ड र = $\frac{८}{२}$ = ४

पुनः क ड = $\sqrt{८^२ - ४^२}$ = $\sqrt{६४ - १६}$ = $\sqrt{४८}$ = ४ $\sqrt{३}$

एवञ्च Δ क प डः → स्प ३०° = $\frac{\text{कड}}{\text{प ड}}$

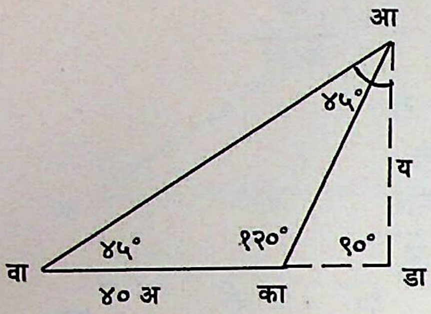
या, $\frac{१}{\sqrt{३}} = \frac{४\sqrt{३}}{\text{प ड}}$

या, प ड= ४ $\sqrt{३}$ × $\sqrt{३}$ = ४ × ३ = १२. उत्तरम्।

(४) आ वा का त्रिभुजे वा का कोणौ क्रमात् ४५°, १२०° तुल्यौ, अत्र अ = ४०, तदा आ विन्दोः वर्धित वा का रेखोपरि पातित लम्ब (आडा) स्य मानं किम्?

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2



अत्र आ डा = लम्बः = य।

वा का = अ = ४०

$\angle$ वा = ४५°, $\angle$ का = १२०°

Δ आ वा डाः →

स्प ४५° = $\frac{\text{आ डा}}{\text{वा डा}}$ = १,

आ डा = वा डा = य

स्प ६०° = $\frac{\text{य}}{\text{का डा}} = \frac{\text{वा डा}}{\text{का डा}} = \sqrt{३}$

वा डा = का डा $\sqrt{३}$

४० + का डा = का डा $\sqrt{३}$

४० का डा = $(\sqrt{३} - १)$

का डा = $\frac{४०}{\sqrt{३}-१}$

$= \frac{४० (\sqrt{३} + १)}{२}$

$= २० (\sqrt{३} + १)$

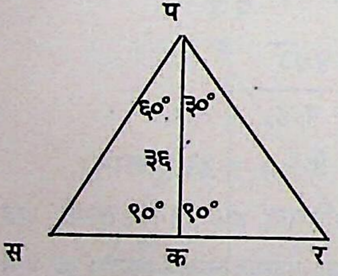
का डा = आ डा = ४० + २० $(\sqrt{३} + १)$

= ६० + २० $\sqrt{३}$ = ६० + २० × १.७ ३२

= ६० + ३४.६४० = ९४.६४ उत्तरम्।

(५) र प स त्रिभुजे र स रेखोपरि पक लम्बः, तदा रस मानं किम्? यदि प क = ३६, ∠ र प क = ३०°, ∠ स प क = ६०°।

Δक प रः→स्प ३०°= $\frac{\text{क र}}{\text{प क}}$



या, $\frac{१}{\sqrt{३}} = \frac{\text{क र}}{३६}$, ∴ कर = $\frac{३६}{\sqrt{३}}$

पुनः Δ स प कः→स्प ६०° = $\frac{\text{स क}}{\text{प क}}$

या, $\sqrt{३} = \frac{\text{स क}}{३६}$, ∴ स क = ३६$\sqrt{३}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\therefore \text{स र} = \text{क स} + \text{कर} = ३६\sqrt{३} + \frac{३६}{\sqrt{३}} = \frac{१०८+३६}{\sqrt{३}}$$

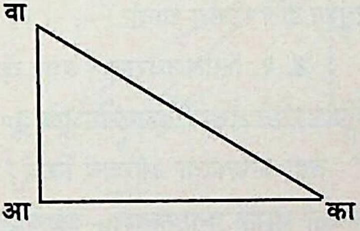
$$\therefore \text{र स} = \frac{१४४\sqrt{३}}{३} = ४८\sqrt{३} \quad \text{उत्तरम्।}$$

।।इति।।

चतुर्थाध्यायः।

औच्च्यान्तरानयनम्।

१३ प्र०- जात्यत्रिभुजगणितम् औच्च्यान्तरानयने विशेषोपयुक्तं भवति एतुत्तु ज्ञातमेवास्ति यदुपयुक्तयन्त्रेण रेखायाः कोणस्य च मापनेन स्पष्टं मानं ज्ञातुं शक्यते।



यस्मिन् कस्मिन्नपि जात्यत्रिभुजे एते निम्नलिखितसम्बन्धास्तु स्वयमेव ज्ञाता भवन्ति। कल्प्यते आवाका त्रिभुजं यत्र आ कोणः समकोणस्तदा

व = अज्यावा	क = अ कोज्यावा
क = व कोस्पवा	व = क स्पवा
अ = क छेवा	अ = व कोछेवा

एते स्वयं सिद्धा एव

उ. १. क, र, ट त्रयो बिन्दवः एकस्यां रेखायां सन्ति। क ट रेखापरि टप

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

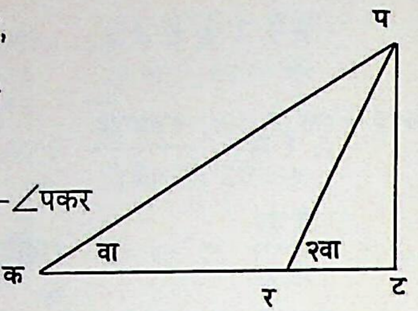
CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

लम्बः। यदि पट = अ, ∠पकट=वा,

∠परट=२ वा, तदा अ, वा मानाभ्यां

क्षेत्रस्थसर्वभुजाः ज्ञाता भवन्ति।

(रे १।३२)युक्त्या ∠कपर= ∠परट-∠पकर



= २ वा - वा = वा = ∠पकर ∴ कर = पर (रे, १।६)

परट जात्यत्रिभुजे पर = अकोछे २ वा

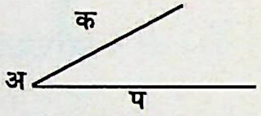
∴ कर = अकोछे २ वा

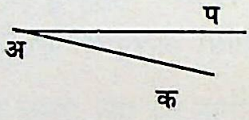
तथा टर = अकोस्प २ वा

सर्वान्त्ये पकट जात्यत्रिभुजे कट = अकोस्पवा

पक = अकोछेवा एवं सर्वे ज्ञाता भवन्ति।

यदि अप समधरातलगता काचित् रेखिका तथा तस्मिन्नेव धरातले क अन्य-विन्दुस्तदा १ क्षेत्रगताः पअक कोणांशा उन्नतांशाः २ क्षेत्रगताः पअक कोणांशाः नतांशा इति मनसि धार्याः।



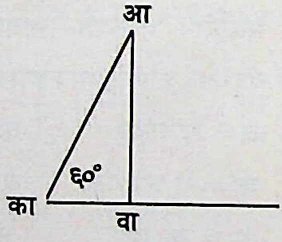


उ. १. क्षितिजधरातले एका वंशाग्रगतपताका स्थापिताऽस्ति तस्याः मूलात्समभुवि ३० हस्तान्तरे स्थितस्य पताकाद्रष्टुर्यद्युन्नतांशाः ६०° तदा पताकाया औच्चयं किम्?

कल्प्यतां वाआ पताकावंशः, का द्रुष्टः स्थानम् तदा, आवा = वाकास्प ६०°

= ३० √३ = ३० x १.७३२ = ५१.९६

अतः औच्च्यम् = ५१.९६



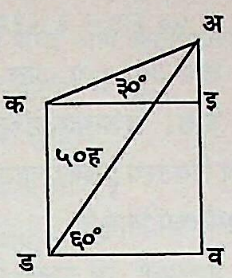
उ.२. प्रासादमूलात् कस्यापि वंशस्याग्रवेधेनोन्नतांशाः ६०° प्रासादो-परिष्टाच्च तस्यैव वेधेनोन्नतांशाः ३०° प्रासादोन्नतिश्च ५० हस्ताः तदा वंशप्रमाणं किम्?

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

कल्प्यते वंशप्रणाणम् = अव = य,

कड प्रासादः = ५० हस्ताः अतः अइ=-अव–वइ = अव–कड = य–५०, तथा कल्प्यते डव = कइ = र,



अडव जात्यक्षेत्रात् र = य कोस्प ६०°

$$= \frac{य}{\sqrt{३}}$$

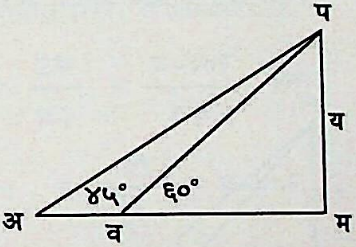
तथा अकइ जात्यक्षेत्रात् र = (य – ५०) कोस्प ३०°

$$= \sqrt{३}\ (य–५०),\ \therefore \frac{य}{\sqrt{३}} = \sqrt{३}\ (य–५०)\ \therefore य = ३\ (य - ५०)$$

$\therefore$ य = ७५ $\therefore$ वंशप्रमाणम् ७५ हस्ताः।

उ. ३. क्षितिजधरातले स्थितायाः वंशाग्रपताकायाः समभुवि स्थितेन केनचित् द्रष्ट्रा। वेधेन लब्धा उन्नतांशाः ४५° पुनर्वंशमूलदिशि १०० हस्तं यावत् गच्छता तेनैव पुरूषेण पताकाबेधे कृते लब्धा उन्नतांशाः ६०° तदा वंशौच्चयं किं प्रथमद्रष्टु वंशमूलान्तरं च किम्?

कल्प्यते य वंशप्रमाणम्, अ, व बिन्दू यत्र द्रष्ट्रा वेधौ कृतौ तथा पम वंशः = य, अत्र अव = १०० हस्ताः



$\angle$ मअप = ४५°, तथा

$\angle$ मवप = ६०°

$$तदा\ \frac{अम}{य} = कोस्प\ ४५° = १,\ तथा\ \frac{वम}{य} = कोस्प\ ६०° = \frac{१}{\sqrt{३}}$$

$$अतः\ अम = य,\ तथा\ वम = \frac{य}{\sqrt{३}}$$

$$\therefore १०० = अम–वम = य - \frac{य}{\sqrt{३}} = \frac{य(\sqrt{३}–१)}{\sqrt{३}}$$

$$\therefore य = \frac{१००\sqrt{३}}{\sqrt{३}–१} = \frac{१००\sqrt{३}\ (\sqrt{३}+१)}{३ - १}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

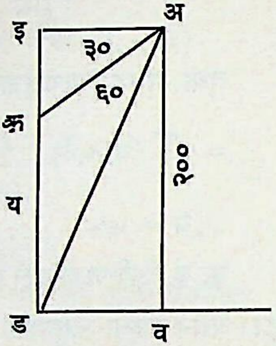
CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$= ५० (३ + \sqrt{३})$

$= ५० [३ + १.७३२०५...] = २३६.६$ हस्ताः

तथा अम = य, अत अभीष्टयोः प्रमाणे २३६.६ हस्ताः

उ.४. द्विशतहस्तोच्छ्रितस्य कस्यचित्पर्वताग्रस्योपरिस्थः कश्चिद्द्रष्टा समभुवि स्थितस्य प्रासादस्याग्रमूले विध्वा लब्धाः क्रमतो नतांशाः ३०°, ६०° तदा प्रासादस्यौच्च्यं किम्?



कल्प्यतां अ द्रष्टुः स्थितिः। वअ पर्वतौच्च्यं तथा डक प्रासादौच्च्यम्। अइ वड समानान्तरा रेखा तदा ∠ इअक = ३०°

तथा ∠ इअड = ६०° तथा कल्प्यतां प्रासादौच्च्यम् = य तथा प्रासादौच्चयं इविन्दु-पर्यन्तं वर्धनीयम् तदा

कइ = अव–य = २००–य

यतः ∠ अडव = ∠ डअइ = ६०° (रे१।२९),

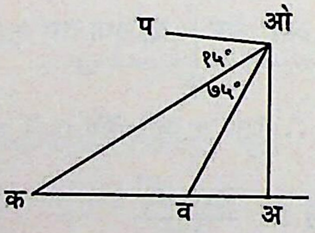
अतः डव = अव कोस्प अडव = २०० कोस्प ६०° $= \frac{२००}{\sqrt{३}}$

तथा $\frac{२००–य}{डव} = \frac{कइ}{इअ} =$ स्प ३०° $= \frac{१}{\sqrt{३}}$

$\therefore २००–य = \frac{डव}{\sqrt{३}} = \frac{२००}{३}$

$\therefore य = २०० - \frac{२००}{३} = १३३\frac{१}{३}$ हस्ताः,

उ. ५. पर्वतशिखरस्थः कश्चिद् द्रष्टा वास्तवदक्षिणस्यां दिशि स्थितौ नावौ विध्वा लब्धाः क्रमतो नतांशाः १५°, ७५° तदा नाबोरन्तरं किम्. यद्यत्र कोस्प १५° = २ + $\sqrt{३}$ तथा



RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

कोस्प ७५° = २ - $\sqrt{३}$ प्रदत्तौ स्तः तथा पर्वतौच्च्यम् च १५० हस्ताः।

कल्प्यतां अओ पर्वतौच्चम्। व, क नावौ तथा ओप क्षितिजधरातल-समानान्तरा रेखा तदा ∠ पओक = १५° तथा ∠ पओव = ७५°,

∴ ∠ ओकअ = १५° तथा ∠ ओवअ = ७५°

कल्प्यतां कव = य, अव = र, तदा कअ = य + र

ओवअ जात्यत्रिभुजवशतः र = १५० कोस्प ७५°

= १५० (२ – $\sqrt{३}$) = ३०० – १५० $\sqrt{३}$

तथा ओकअ जात्यत्रिभुजवशतः य + र = १५० कोस्प १५°

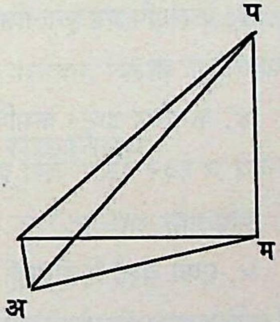
= १५० (२ + $\sqrt{३}$) = ३०० + १५० $\sqrt{३}$

द्वयोन्तरेण य = ३०० $\sqrt{३}$ = ५१९.६

अतः नावोरन्तरम् ५१९.६

उ. ६ कस्यचित्प्रासादस्य वास्तवदक्षिणस्यां दिशि स्थितः कश्चिद्द्रष्टा प्रासादशिखरं विध्वा लब्धा उन्नतांशाः ६०° ततः स एव द्रष्टा तस्मादेव विन्दोः वास्तव पश्चिमायां दिशि हस्तशतत्रयं गत्वा पुनः प्रसादशिखरं विध्वा लब्धा उन्नतांशाः ३०° तदा प्रासादौच्च्यं प्रथमस्थितिप्रासादान्तरं च साध्याताम्।

कल्प्यतां प शिखरम्, मप प्रासादौच्च्यम् अ प्रासादमूलाद्वास्तव-दक्षिणस्यां दिशि विन्दुः तथा अ विन्दोः वास्तवपश्चिमायां दिशि हस्तशतत्रयान्तरे व विन्दुः ∴ पमअ, पमव, तथा मअव कोणाः समकोणाः तथा अब=३०० हस्ताः, ∠पअम = ६०°, ∠पवम=३०°, कल्प्यतां प्रासादौच्च्यम् य हस्ताः = पम



तदा $\frac{अम}{य}$ = कोस्प ६०° = $\frac{१}{\sqrt{३}}$ ∴ अम = $\frac{य}{\sqrt{३}}$

एवं $\frac{वम}{य}$ = कोस्प ३०° = $\sqrt{३}$, ∴ वम = $\sqrt{३}$ य

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

तथा वम^२ = अम^२ + अव^२, अर्थात् ३य^२ = $\frac{१}{३}$ य^२ + (३००)^२

∴ ८ य^२ = ३ x (३००)^२

∴ य = $\frac{३००\sqrt{३}}{२\sqrt{२}}$ = १५० $\frac{\sqrt{६}}{२}$ = ७५ $\sqrt{६}$

= ७५ x २.४४९४९..... = १८३.७१....हस्ताः

तथा प्रथमस्थितिप्रासादान्तरम् = यकोस्प ६०° = $\frac{य}{\sqrt{३}}$

= ७५ $\sqrt{२}$ = ७५ x (१.४१४२...)=१०६.६५ हस्ताः।

(९) निम्नलिखितप्रश्नाः साध्यन्ताम्।

१. कस्यापि वंशस्याग्रवेधे कृते लब्धा उन्नतांशाः ३०° वंशमूलद्रष्टुरन्तरं = ३०० हस्ताः तदा वंशौच्च्यं किम्?

२. ४५ हस्तप्रमाणं सोपानं कस्याश्चिद्भित्तेरन्तपर्यन्तं लग्नमस्ति तथा यदि सोपानं भित्त्या सह ६०° कोणं निर्माति तदा भित्तेरौच्च्यं किं तथा सोपानमूलभित्त्योरन्तरञ्च किम्?

३. कस्यापि षडङ्गलमितशङ्कोश्छाया २ $\sqrt{३}$ अङ्गुलमिता दृष्टा तदा सूर्यस्योन्नतांशाः के?

४. केनचिद् द्रष्ट्रा कमपि पर्वतशिखरं विध्वा लब्धा उन्नतांशाः ४१° १८' पर्वतौच्च्यं च १३२ हस्ताः तदा द्रष्टुः पर्वतशिखरान्तरं किम्?

यदि ज्या ४१° १८' = .६६

५. एको वंशो द्वितीयात् ३० हस्तप्रमाणं महत्तरः लघुवंशाच्छतहस्तान्तरे स्थितः कश्चिद्द्रष्टा वंशयोरग्रमेकस्यामेव रेखायां पश्यति या च रेखा क्षितिजधरातलेन २७°२' कोणं निर्माति तदा वंशप्रमाणे के? यदि स्प २७° २' = .५१

६. केनचिद् द्रष्ट्रा कमपि प्रासादाग्रं विध्वा लब्धा उन्नतांशाः ३०° पुनस्तस्माद्बिन्दोः प्रासादमूलदिशि शतहस्तान्तरं गत्वा प्रासादाग्रवेधेन लब्धा उन्नतांशाः ६०° तदा प्रासादौच्च्यं किम्?

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

७. कस्यचिद्भवनस्य शिखरे वंशध्वजो वर्त्तते, भवनमूलात् ४० हस्तान्तरे स्थितेन केनचिद् द्रष्ट्रा भवनाग्रं ध्वजाग्रं च विध्वा लब्धा उन्नतांशाः क्रमतः ३०°, ६०° तथा वंशध्वजप्रमाणं किम्?

८. कस्यापि दुर्गस्याग्रबेधेनोन्नतांशाः ३०°, तस्मात् स्थानात् १०० हस्तप्रचलनेन पुनर्वेधे कृते लब्धा उन्नतांशाः ६०° तदा दुर्गस्य प्रमाणं किम्?

९. कस्याश्चिन्नद्यास्तीरे तिष्ठन् कश्चित्पुरुषः नद्या अपरतीरे स्थितं वृक्षं ६०° कोणनिर्माणकं प्राप्नोति, पुनः ४० हस्तप्रमाणं नदीतीरङ्गत्वा ३०° कोणनिर्माणकं प्राप्नोति तदा नद्याः विस्तारप्रमाणं वृक्षौच्च्यं च किम्?

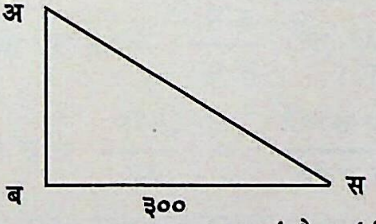
१०. कुत्रचित् स्थितेन पुरुषेण दुर्गशिखरस्योन्नतांशान् विध्वा तेषां कोटि स्पर्श रेखाप्रमाणम् $\frac{३}{५}$ लब्धम्, पुनर्दुर्गदिश्येव ३२ हस्तान् गत्वा उन्नतांशानां कोटि स्पर्श रेखा $\frac{२}{५}$ लब्धा तदा दुर्गौच्च्यं किम्?

११. कुत्रचित् विन्दौ कस्यचित् दुर्गस्योन्नतांशानां स्पर्श रेखा $\frac{५}{१२}$ तथा तद्दिश्येव २४० हस्तान् गत्वोन्नतांशानां स्पर्श रेखा $\frac{३}{४}$ लब्धा तदा दुर्गस्यौच्च्यं किम्?

१२. कस्यापि वंशस्य वेधेन लब्धा उन्नतांशाः ३०° तथा १०० हस्तप्रमाणं क्षितिजधरातले गत्वा लब्धा उन्नतांशाः ४५° तदा वंशौच्च्यं किम्?

(९) निम्नलिखितप्रश्नाः साध्यन्ताम्

शालिनी–(१) कस्यापि वंशस्याग्रवेधे कृते लब्धा उन्नतांशाः ३०° वंशमूलद्रष्टुरन्तरं = ३०० हस्ताः तदा वंशौच्च्यं किम्?



कल्प्यते अब वंशः = क,
स = दुष्टु स्थानम्,
ब = वंशमूलम्.
बस = ३०० हस्ताः

तदा वंशौच्चयं किमिति? लब्धोन्नतांशाः = ३०°।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

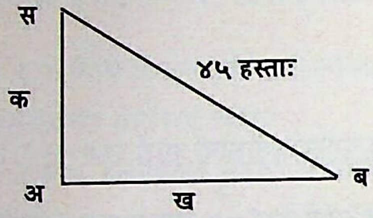
$$\therefore \text{स्प } ३०^\circ = \frac{\text{अ ब}}{\text{अ स}}$$

$$\text{या, } \frac{१}{\sqrt{३}} = \frac{\text{क}}{३००}, \therefore \text{क} = \frac{३००}{\sqrt{३}}$$

$$= \frac{३००\sqrt{३}}{३} = १०० \sqrt{३}$$

या, वंशौच्चयम् = १०० x १.७३२ =१७३.२ हस्ताः उत्तरम्।

(२) ४५ हस्तप्रमाणं सोपानं कस्याश्चिभ्दित्तेरन्तपर्यन्तं लग्नमस्ति तथा यदि सोपानं भित्त्या सह ६०° कोणं निर्माति तदा भित्तेरौच्चयं किं तथा सोपानमूलभित्त्योरन्तञ्च किम्?



कल्प्यते अ स = भित्तिः = क

सोपानं = बस ४५ हस्ताः

ब = सोपानमूलम्।

सोपानमूलभित्त्योरन्तरं = अ ब =ख

$$\text{अतः प्रश्नानुसारेण} \rightarrow \text{ज्या } ६०^\circ = \frac{\text{अस}}{\text{बस}}$$

$$\text{या } \frac{\sqrt{३}}{२} = \frac{\text{क}}{४५}, \therefore \text{क} = \frac{४५ \times \sqrt{३}}{२}$$

$$= \frac{४५ \times १.७३२}{२}$$

$$\text{अतः भित्तेरौच्चयं} = \text{क} = \frac{७७.९९}{२}$$

= ३८.९७ हस्ताः।

$$\text{पुनः कोज्या } ६०^\circ = \frac{\text{अ ब}}{\text{ब स}}$$

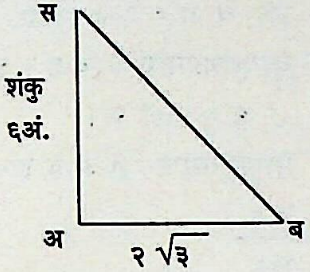
RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{या } \frac{१}{२} = \frac{\text{ख}}{४५}, \therefore \text{ ख} = \frac{४५}{२} = २२.५ \text{ हस्ताः}$$

अतः सोपानमूलभित्त्योरन्तरं = २२.५ हस्ताः उत्तरम्।

(३) कस्यापि षडङ्गुलमितशङ्कोश्छाया २ √३ अङ्गुलमिताः दृष्टा तदा सूर्यस्योन्नतांशाः के?



कल्प्यते अ स = शंकुः = ६ अङ्गुलानि। तस्य छाया अ ब = २ √३, तदा ∠ अ ब स (उन्नतांशाः) = के?

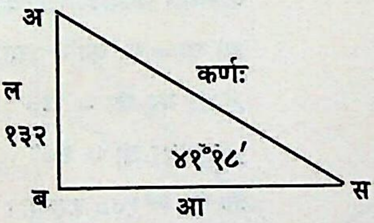
अत्र अ स = लम्बः, अ ब = आधार, ब स = कर्णः।

$$\therefore \text{ स्प ब} = \frac{\text{अ स}}{\text{अ ब}} = \frac{६}{२\sqrt{३}} = \sqrt{३}$$

$$\text{या स्प ब} = \sqrt{३} = \text{स्प } ६०^\circ$$

$$\therefore \text{ब} = ६०^\circ \text{ उत्तरम्।}$$

(४) केनचिद् द्रष्ट्रा कमपि पर्वतशिखरं विध्वा लब्धा उन्नतांशाः ४१°१८′ पर्वतौच्च्यं च १३२ हस्ताः तदा द्रष्टुः पर्वतशिखरान्तरं किम्? यदि ज्या ४१° १८′ = .६६



कल्प्यते अ ब पर्वतः,अस्यौच्च्यं= १३२ हस्ताः, स = द्रष्टु स्थनम्। प्राप्तोन्नतांशाः = ४१° १८′ = ∠स। ∴ Δ अ ब सः—

$$\text{ज्या } ४१^\circ\ १८' = \frac{\text{अ ब}}{\text{अ स}}, \text{ या, } .६६ = \frac{१३२}{\text{अ स}}$$

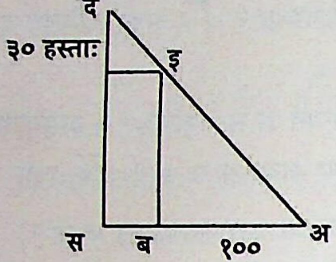
$$\text{या, अ स} = \frac{१३२}{.६६} = \frac{१३२००}{६६} = २०० \text{ हस्ताः}$$

अतः द्रष्टुः पर्वतशिखरान्तरम् = २०० हस्ताः उत्तरम्।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(५) एको वंशो द्वितीयात् ३० हस्तप्रमाणं महत्तरः लघुवंशाच्छतहस्तान्तरे स्थितः कश्चिद्द्रष्टा वंशयोरग्रमेकस्यामेव रेखायां पश्यति या च रेखा क्षितिज धरातलेन २७° २' कोणं निर्माति तदा वंशप्रमाणे के?



यदि स्प २७°२' = .५१

अत्र लघुवंशः = ब इ, वृहद्वंशः= सद, ब अ = १०० हस्ताः,

वृहद्वंशप्रमाणं = (ब इ + ३०),

∠ अ = २७° २'।

प्रश्नानुसारेण– Δ अ ब इः–

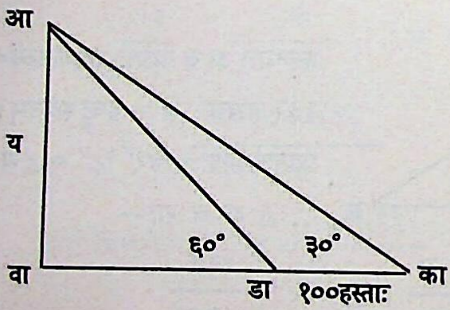
$$\text{स्प } २७° २' = \frac{\text{ब इ}}{\text{अ ब}}, \text{ या, } .५१ = \frac{\text{ब इ}}{१००}$$

∴ बइ = १०० x .५१ = ५१ हस्ताः (लघुवंशः)

एवञ्च सद = ब इ + ३० = ५१ + ३० = ८१ हस्ताः

(वृहद्वंशः), उत्तरम्।

(६) केनचिद् द्रष्टा कमपि प्रासादग्रं विध्वा लब्धा उन्नतांशाः ३०° पुनस्तस्माद्बिन्दोः प्रासादमूल दिशि शतहस्तान्तरं गत्वा प्रासादाग्रवेधेन लब्धा उन्नतांशाः ६०° तदा प्रासादौच्च्यं किम्?



कल्प्यते प्रासादस्यौच्च्यं = आ वा = य, का = द्रष्टास्थनम्।

∠आ का वा = ३०°,

∠आ डा वा = ६०°,

का डा = १०० हस्ताः।

अतः प्रश्नानुसारेण Δ आ वा काः-

$$\text{कोस्प } ३०° = \frac{\text{वा का}}{\text{आ वा}}, \text{ या, } \sqrt{३} = \frac{\text{वा का}}{\text{य}}$$

∴ वा का = य √३

पुनः Δ आ वा डाः–

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{स्प } ६०^\circ = \frac{\text{आ वा}}{\text{वा डा}}, \text{ या}, \sqrt{३} = \frac{\text{य}}{\text{वा डा}}$$

$$\therefore \text{ वा डा} = \frac{\text{य}}{\sqrt{३}}$$

$$\text{का डा} = १०० = \text{वा का} - \text{वा डा}$$

$$= \text{य}\sqrt{३} - \frac{\text{य}}{\sqrt{३}}$$

$$\text{या}, १०० = \frac{३\text{ य} - \text{य}}{\sqrt{३}}$$

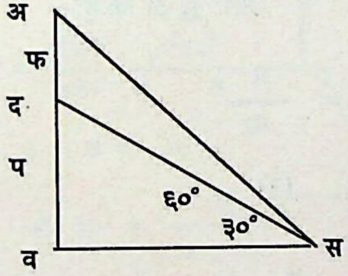
$$\text{या}, ३\text{ य} - \text{य} = १०० \times \sqrt{३}$$

$$\text{या } २\text{ य} = १०० \times \sqrt{३}$$

$$\therefore \text{ य} = \frac{१०० \times \sqrt{३}}{२} = ५० \sqrt{३}$$

$= ५० \times १.७३२ = ८६.६$ हस्ताः उत्तरम्।

(७) कस्यचिद् भवनस्य शिखरे वंशध्वजो वर्त्तते, भवनमूलात् ४० हस्तान्तरे स्थितेन केनचिद् द्रष्ट्रा भवनाग्रं ध्वजाग्रं च विध्वा लब्धा उन्नतांशाः क्रमशः ३०° ६०° तदा वंशध्वज प्रमाणं किम्?



कल्प्यते व द = भवनं = प, द अ = वंशध्वजः = फ, स=द्रष्ट्रा, द्रष्ट्राभवनमूलान्तरं = ४० हस्ताः= व स, चित्रानुसारेण प्राप्तोन्नतांशाः क्रमशःव स द=३०°,अ स व=६०° पुनः Δ व स दः$\rightarrow$

$$\text{स्प } ३०^\circ = \frac{\text{व द}}{\text{व स}}, \text{ या } \frac{१}{\sqrt{३}} = \frac{\text{प}}{४०}, \therefore \text{ प} = \frac{४०}{३} \ldots (१)$$

पुनः Δ अ स व $\rightarrow$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{स्प } ६०^\circ = \frac{\text{अ व}}{\text{व स}}, \text{ या}, \sqrt{३} = \frac{\text{प} + \text{फ}}{४०}$$

$$\text{या}, \text{प} + \text{फ} = ४० \sqrt{३}$$

$$\therefore \text{फ} = ४० \sqrt{३} - \text{प}$$

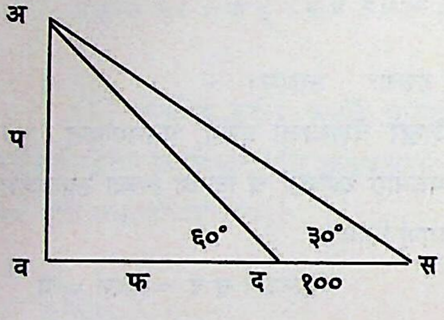
$$= ४० \sqrt{३} - \frac{४०}{\sqrt{३}} = ४० \left(\sqrt{३} - \frac{१}{\sqrt{३}}\right)$$

$$\therefore \text{फ} = ४० \left(\frac{३ - १}{\sqrt{३}}\right) = \frac{८०}{३} = \frac{१०}{१.७३२}$$

$$= ४६.१९$$

अतः वंशध्वजप्रमाणम् = ४६.१९ हस्ताः उत्तरम्।

(८) कस्यापि दुर्गस्याग्रबेधेनोन्नतांशाः ३०°, तस्मात् स्थानात् १०० हस्तप्रचलनेन पुनर्वेधे कृते लब्धा उन्नतांशाः ६०° तदा दुर्गस्य प्रमाणं किम्?



कल्प्यते अ व = दुर्गः, दुर्गस्यौच्चयं = प, स = द्रष्टु स्थानम्, व द = फ, द स=१००हस्ताः, ∠अ स व = ३०° ∠ अ द व = ६०°।

अतः Δ अ व दः—

$$\text{स्प } ६०^\circ = \frac{\text{प}}{\text{फ}}, \text{ या}, \sqrt{३} = \frac{\text{प}}{\text{फ}}$$

$$\therefore \text{फ} = \frac{\text{प}}{\sqrt{३}} \text{ ....(१)}$$

$$\text{पुनः } \Delta \text{ अ व सः– स्प } ३०^\circ = \frac{\text{प}}{१०० + \text{फ}}$$

$$\text{या}, \quad \frac{१}{\sqrt{३}} = \frac{\text{प}}{१०० + \text{फ}}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

या, $\sqrt{३}$. प = १०० + फ

या $\sqrt{३}$ प = १०० + $\frac{प}{\sqrt{३}}$

या $\sqrt{३}$ प = $\frac{१०० \sqrt{३} + प}{\sqrt{३}}$

या ३ . प = १०० $\sqrt{३}$ + प

या ३ प − प = १०० $\sqrt{३}$

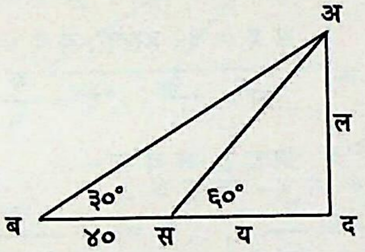
या २ प = १०० $\sqrt{३}$

∴ प = ५० $\sqrt{३}$

अतः दुर्गस्य प्रमाणं = ५० $\sqrt{३}$ = ५० × १.७३२ = ८६.६

हस्ताः उत्तरम्।

(९) कस्याश्चिन्नधास्तीरे तिष्ठन् पुरूषः नद्याः अपरतीरे स्थितं वृक्षं ६०° कोणनिर्माणकं प्राप्नोति, पुनः ४० हस्तप्रमाणं नदीतीरङ्गत्वा ३०° कोणनिर्माणकं प्राप्नोति तदा नद्याः विस्तार प्रमाणं वृक्षौच्च्यं च किम्?



कल्प्यते वृक्षौच्च्यं = अ द = ल।

नद्याः विस्तार प्रमाणं = स द = य।

Δ अ स दः → स्प ६०° = $\frac{ल}{य}$

या स्प ६०° × य = ल

या य $\sqrt{३}$ = ल........(१)

Δ अ ब दः →

स्प ३०° = $\frac{ल}{य + ४०}$

या, ल = (य + ४०) $\frac{१}{\sqrt{३}}$

या, य $\sqrt{३}$ = $\frac{य}{\sqrt{३}}$ + $\frac{४०}{\sqrt{३}}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{या, य}\left(\frac{\sqrt{३}}{१} - \frac{१}{\sqrt{३}}\right) = \frac{४०}{\sqrt{३}}$$

$$\text{या, य}\ \frac{२}{\sqrt{३}} = \frac{४०}{\sqrt{३}}$$

या २ य = ४०

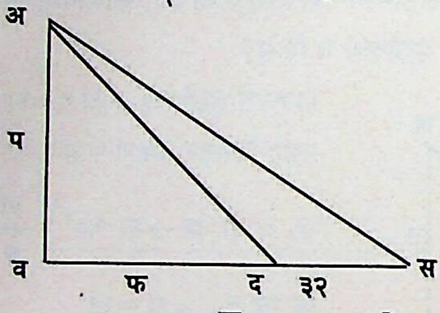
∴ य = २० = नद्याः विस्तार प्रमाणम्।

पुनः य $\sqrt{३}$ = ल

या २० × $\sqrt{३}$ = ल = २० × १.७३२ = ३४.६४ हस्ताः

= वृक्षौच्च्यम्।

(१०) कुत्रचित् स्थितेन पुरूषेण दुर्गशिखरस्योन्नतांशान् विध्वा तेषां कोटि स्पर्श रेखा प्रमाणं $\frac{३}{५}$ लब्धम्, पुनर्दुर्गदिश्येव ३२ हस्तान् गत्वा उन्नतांशानां कोटि स्पर्शरेखा $\frac{२}{५}$ लब्धा तदा दुर्गौच्च्यं किम्?



कल्प्यते अ व = दुर्गः,

दुर्गौच्च्यं = प, स = पुरूषस्थानम्,

स द = ३२ हस्ताः, व द = फ,

∠स = $\frac{३}{५}$, ∠द = $\frac{२}{५}$ ।

अतः Δ अ व दः—

$$\text{कोस्प द} = \frac{\text{फ}}{\text{प}},\ \text{या,}\ \frac{२}{५} = \frac{\text{प}}{\text{फ}},\ \therefore \text{प} = \frac{५.\text{फ}}{२}$$

$$\text{या, फ} = \frac{२}{५}.\text{प}$$

पुनः Δ अ व सः—

$$\text{कोस्प स} = \frac{\text{फ} + ३२}{\text{प}}$$

$$\text{या}\ \frac{३}{५} = \frac{\text{फ} + ३२}{\text{प}},\ \therefore \frac{३}{५}.\text{प} = \text{फ} + ३२$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

या $\frac{३}{५}$. प = $\frac{२}{५}$. प + ३२

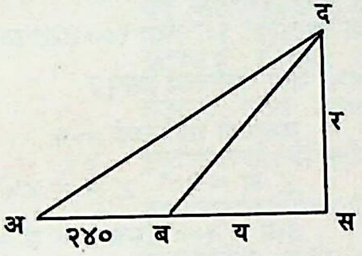
या $\frac{३}{५}$ प - $\frac{२}{५}$ प = ३२

या $\left(\frac{३ - २}{५}\right)$ प = ३२

$\therefore$ प = ३२ x ५ = १६०

अतः दुर्गौच्च्यं = १६० हस्ताः उत्तरम्।

(११) कुत्रचित् विन्दौ कस्यचित् दुर्गस्योन्नतांशानां स्पर्श रेखा $\frac{५}{१२}$ तथा तद्दिश्येव २४० हस्तान् गत्वोन्नतांशानां स्पर्श रेखा $\frac{३}{४}$ लब्धा तदा दुर्गस्यौच्च्यं किम्?



कल्प्यते दुर्गस्यौच्च्यं = र।

अ ब = २४० हस्ताः ब स = य।

∠ अ = $\frac{५}{१२}$ ∠ब = $\frac{३}{४}$ अर्थात्

स्प अ = $\frac{५}{१२}$ स्प ब = $\frac{३}{४}$

Δ ब स दः → स्प ब = $\frac{३}{४}$ = $\frac{र}{य}$

या ३ य = ४ र

$\therefore$ य = $\frac{४ र}{३}$ . . . . . .(१)

Δ अ स दः—

स्प अ = $\frac{द स}{अ स}$ = $\frac{र}{अ ब + ब स}$ = $\frac{र}{य + २४०}$

या, $\frac{र}{य + २४०}$ = $\frac{५}{१२}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

या, १२ र = ५ (य + २४०)

$$\therefore \text{र} = \frac{५}{१२}(\text{य} + २४०)$$

$$= \frac{५}{१२}\left(\frac{४\,\text{र}}{३} + २४०\right)$$

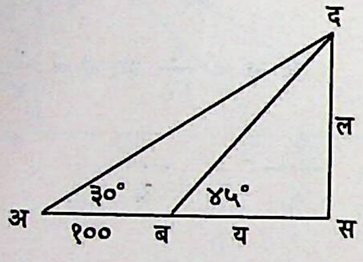
$$\text{या, र} = \frac{५}{९}\text{र} + १००$$

$$\text{या, र} - \frac{५}{९}\text{र} = १००$$

$$\text{या } \frac{४\text{र}}{९} = १००$$

$$\therefore \text{र} = \frac{१०० \times ९}{४}$$ = २२५ हस्ता = दुर्गस्यौच्च्यम्।

(१२) कस्यापि वंशस्य वेधेन लब्धा उन्नतांशाः ३०° तथा १०० हस्त प्रमाणं क्षितिज धरातले गत्वा लब्धा उन्नतांशाः ४५° तदा वंशौच्च्यं किम्?



कल्प्यते वंशौच्च्यं = ल

∠ अ = ३०° ∠ ब = ४५°

अब = १०० हस्ताः। ब स = य

$$\text{स्प } ४५° = \frac{\text{ल}}{\text{य}} = १$$

$$\text{स्प } ३०° = \frac{\text{ल}}{\text{य}+१००} = \frac{१}{\sqrt{३}}$$

या, ल $\sqrt{३}$ = य + १००

$$\therefore \text{ल} = \frac{\text{य}+१००}{\sqrt{३}} = \frac{\text{ल}+१००}{\sqrt{३}}$$

∴ ल. $\sqrt{३}$ = ल + १००

या $\sqrt{३}$ ल − ल = १००

ल ($\sqrt{३}$ − १) = १००

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\therefore \text{ल} = \frac{१००}{(\sqrt{३}-१)} \times \frac{(\sqrt{३}+१)}{\sqrt{३}+१} = \frac{१००(\sqrt{३}+१)}{३ - १}$$

$$= ५० (\sqrt{३} + १)$$

$$= ५० (१.७३२ + १)$$

$$= ५० \times २.७३२$$

= १३६.६ हस्ताः = वंशौच्च्यम्।

।।इति।।

अत्र भास्करीयोदाहरणानि–

१३. पंचशक्राङ्गुला यष्टिरष्टषष्टिर्दृगुच्छ्रयः।
षट् करास्तलवेधो दोः कोटिः सप्तदशाङ्गुला।।
अग्रवेधे रसेशा दोः कोटिस्तुरगकुञ्जराः।
वंशस्य यस्य तन्मानं चात्मवंशान्तरं वद।।

१४. इष्ट्यष्ट्योर्ध्वसंस्थेन वंशाग्रं विध्यता भुजः।
दृष्टश्चतुष्करोऽथान्ययष्ट्या खाङ्काङ्गुलः सखे।।
निविष्टेन तथा कोटिरङ्गुलं वेधयोरपि।
आत्मवंशान्तरं ब्रूहि वंशोच्छ्रायं च वेधवित्।।

१५. दृष्टा चेत् व्यङ्गुला कोटिर्बाहुश्च चतुरङ्गुलः।
ऊर्ध्वस्थेनोपविष्टेन बाहुरेकादशाङ्गुलः।।
कोटिरष्टाङ्गुला तोये वंशाग्रं विध्यता सखे।
त्र्येकहस्तौ दृगुच्छ्रायौ वंशौच्च्यं चान्तरं वद।।

❑

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

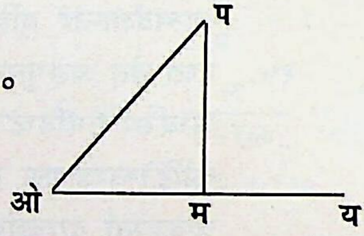
पञ्चमाध्यायः

त्रैकोणमितिविशेषताया वैचित्र्यम्।

प्र. १४ अत्र $\frac{अ}{य}$ भिन्ने अ इत्यस्य यदि स्थिरं मानं य हरस्य मानमस्थिरं रूपाल्पञ्च तदा य हरस्य मानं यथा यथाल्पं कल्प्यते तथा तथा भिन्नस्यास्य मानमधिकम्। उदाहरणार्थम् $\frac{अ}{\frac{१}{१०}} = १० अ$, $\frac{अ}{\frac{१}{१०००}} = १००० अ$,

$\frac{अ}{\frac{१}{१००००००}} = १०००००० अ$। एवं य इत्यस्य परमाल्पे शून्यसमे माने कल्पितलब्धिरनन्तावधिका, ∞ इदमनन्तद्योतकं चिह्नं, तेन यदि य = ०, तदा $\frac{अ}{य}$ अवधिः = ∞, एवं यदि य मानं वर्धते तदा परमाधिकं ∞ एतत्तुल्यं भवति तदा लब्धिरत्यल्पिका = ०

∴ यदि य = ∞ , $\frac{अ}{य}$ अवधिः = ०



०° इत्यस्य त्रैकोणमितिक प्रपञ्चः।

ओप स्थिरव्यासार्धे य ओप कश्चिदेककोणः

ओय रेखोपरि पम लम्बः करणीयस्तदा ज्यापओम = $\frac{मप}{ओप}$

यदि कल्प्यते पओम कोणः क्रमशः क्षीयते तदा मप रेखापि क्रमशः क्षीणा भवति। एवं यदि ओपरेखा ओमरेखया संलग्ना भवति तदा पओम कोणोऽपि

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

नाशामियादेवं मप = ० अतः ज्या ०° $\frac{०}{\text{ओप}}$ = ०

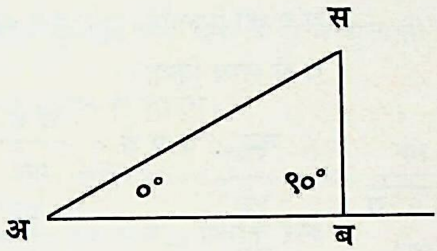
कोज्यापओम = $\frac{\text{ओम}}{\text{ओप}}$ एवमत्रापि पओम कोणस्य नाशे ओप,

ओम रेखोपरि पतेत् तेन कोज्या ०° = $\frac{\text{ओप}}{\text{ओप}}$ = १

एवं स्प ०° = $\frac{\text{मप}}{\text{ओम}} = \frac{०}{\text{ओम}}$ = ०, तथा कोछे०° = $\frac{१}{\text{ज्या}०°} = \frac{१}{०} = \infty$

छे ०° = $\frac{१}{\text{कोज्या}०°} = \frac{१}{१}$ = १, कोस्प०° = $\frac{१}{\text{स्प}०°} = \frac{१}{०} = \infty$

शालिनी–०° अंशस्य त्रैकोणमितिक सम्बन्धः।



कल्पना किया कि अ ब स एक अतिन्यून कोण त्रिभुज है। जिसमें ∠ अ = ०°, ∠ ब = ९०° एवं ∠ स = ९०° – ०°। अब=आधार, बस = लम्ब, और अस = कर्ण। ∠ अ = ० होने के कारण अस रेखा अब रेखा पर मिलती है अर्थात् अब = अस तथा बस =० =लम्ब।

∴ ज्या ०° = $\frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{०}{\text{कर्ण}}$ = ०

कोज्या ०° = $\frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{आधार}}{\text{आधार}}$ = १

स्प ०° = $\frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{०}{\text{आधार}}$ = ०

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

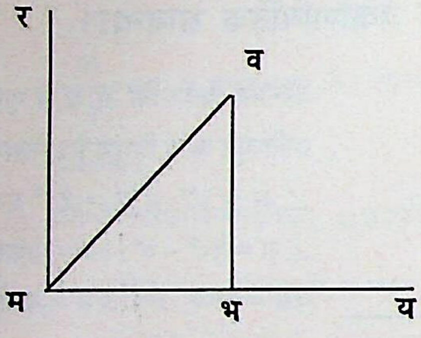
CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{कोस्प } 0^\circ = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{\text{आधार}}{0} = \infty$$

$$\text{छे } 0^\circ = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{\text{आधार}}{\text{आधार}} = 1$$

$$\text{कोछे } 0^\circ = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{\text{कर्ण}}{0} = \infty$$

यहाँ ०° अंश का त्रैकोणमितिक सम्बन्ध संक्षेप में दिखाया गया है तथा पूर्व में ९०° का भी त्रैकोणमितिक सम्बन्ध संक्षेप में ही दर्शाया गया है। विस्तार के साथ ०° की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ इस प्रकार है–



मानलिया कि य व र एक वृत्त का चाप है, जिसका केन्द्र म है। वृत्त पर एक व बिन्दु लिया और म व को मिलाया। व से मय पर व भ लम्ब किया।

$$\therefore \text{ ज्या } \angle \text{य म व} = \frac{\text{व भ}}{\text{मव}}$$

$$\text{और कोज्या } \angle \text{य म व} = \frac{\text{मभ}}{\text{मव}}$$

यदि बिन्दु व धीरे धीरे य की ओर चलता है तो ∠ य म व छोटा होता जायेगा। साथ ही बिन्दु व भी रेखा म भ य के निकट आयेगा। अर्थात् रेखा व भ छोटी होती जायेगी। इसके बाद जनक रेखा म व घुमकर म य को ढ़क लेगी। ऐसी स्थिति में ∠ य म व घटकर ०° का हो जायेगा। लेकिन हर सदैव नित्य रहेगा।

$\therefore$ ज्या ०° = $\frac{0}{\text{मव}}$ = ०, जैसे जैसे जनक रेखा म य के निकट आती है वैसे ही बिन्दु व बिन्दु य के निकट आता है और रेखा व भ बिन्दु य के निकट होती जाती है, यहाँ तक कि जब रेखा म व रेखा मय को ढ़क लेगी तब भ भी य को ढ़क लेगा। और उस दशा में म भ = म य = म व हो जायेगी।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\therefore \text{ कोज्या } 0^\circ = \frac{\text{मभ}}{\text{मव}} = \frac{\text{मव}}{\text{मव}} = १$$

$$\text{छे } 0^\circ = \frac{\text{मव}}{\text{मभ}} = \frac{\text{मव}}{\text{मव}} = १$$

$$\text{स्प } 0^\circ = \frac{\text{वभ}}{\text{मभ}} = \frac{0}{\text{मव}} = 0$$

पुनः चित्रानुसार—

$$\text{कोस्प } \angle \text{ भ म व} = \frac{\text{मभ}}{\text{बभ}},$$

$$\text{कोछे } \angle \text{ भ व म} = \frac{\text{मव}}{\text{वभ}}$$

जैसे जैसे कोण भ म व छोटा होता जाता है, वैसे ही रेखा व भ छोटी होती जाती है और जब अन्त में व भ शून्य हो जायगी तो भिन्न $\frac{\text{मव}}{\text{वभ}}$ और $\frac{\text{मभ}}{\text{वभ}}$ भी अनन्त हो जायेगें।

$$\therefore \text{ कोछे } 0^\circ = \frac{\text{मव}}{\text{वभ}} = \frac{\text{मव}}{0} = \infty$$

$$\text{कोस्प } 0^\circ = \frac{\text{मभ}}{\text{वभ}} = \frac{\text{मभ}}{0} = \infty$$

परिभाषा—अनन्त (∞) संख्या एसी संख्या है जो किसी भी बड़ी से बड़ी संख्या से, जिसकी कल्पना हम कर सकते है, बड़ी है। इसको चिह्न '∞' से प्रगट करते है। यदि हम एक हजार की कल्पना करते हैं तो ∞ इससे बहुत बड़ी संख्या है। यदि हम एक करोड़ की कल्पना करते हैं तो ∞ इससे भी बड़ी है। तात्पर्य यह कि ∞ प्रत्येक संख्या से बड़ी है जिसकी हम कल्पना करते हैं।

पदज्ञानं तद्वशेन धनर्णत्वज्ञानं च।

प्र. १५ तत्र प्रथमं न केवलं रेखायाः प्रमाणस्य अपि त्वस्याः दिशाया अपि ज्ञानं क्रियते येनास्याः धनात्मिकायाऋणात्मिकायाश्च ज्ञानं भवति।

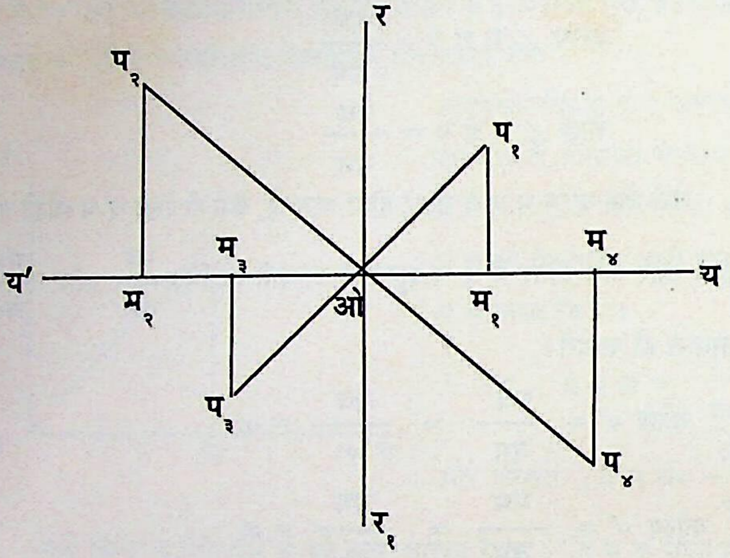
RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

य′ प′ ओ प य

कल्प्यते कस्या अपि क्षितिजधरातलगत यय′ रेखायाः कोऽपि विन्दुः ओ तदा ओ, विन्दोः ओय रेखायां दक्षिणस्यां दिशि कोपि विन्दुर्धनं कल्प्यते। यथाऽत्र ओप धनम्, एवमेव ओ विन्दोस्तस्यामेव रेखायां वामभागे कोऽपि विन्दुः ऋणम्। यथा ओप′ ऋणम्। यदि ओप=ओप′=अ तदा ओप = +अ एवम् ओप′ = – अ

एवं कस्मिंश्चित्समधरातले ज्यादीनामपि धनात्मकत्वम्, ऋणात्मकत्वं वा स्वीक्रियते यच्चाग्रिमप्रक्रमे विशदीभविष्यति।



कल्प्यते समक्षितिजधरातले ओ कश्चिद्विन्दुः, ओ विन्दोः यय′ रर′ क्रमशः याम्योत्तर-पूर्वापरे रेखिके। एवमाभ्यां रेखाभ्यां धरातलस्य चत्वारः समविभागाः भवन्ति। प्रत्येक विभागः पदसंज्ञया व्यवह्रियते।

यथा भचक्रे मेषादितो राशयः दक्षिणावर्त्तेन सन्ति एवं पदादीनां संज्ञापि दक्षिणावर्तेनैव कल्प्यते, यतोऽनया त्रिकोणमित्या खस्थपदार्थानां सम्बन्धोऽस्ति एवं दक्षिणोत्तररेखाया प्रारम्भत एव पदसंज्ञा स्वीकृता।

अतः य तो र विन्दुपर्यन्तं प्रथमं पदम्। र तः य′ पर्यन्तं द्वितीयं पदम्, य′ तः र′ पर्यन्तं तृतीयं पदम्, एवम् र′तः य पर्यन्तं चतुर्थं पदम्। अतः रर′ रेखातो दक्षिणभागे याम्योत्तराः सर्वा रेखाः धनात्मिकाः एवं रर′ रेखायाः वामभागे सर्वाः

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

याम्योत्तररेखाः ऋणात्मिकाः।

तेन ओम$_{१}$, ओम$_{२}$, धनात्मिके तथा ओम$_{३}$, ओम$_{३}$ ऋणात्मिके, एवं यये रेखात ऊर्ध्वं सर्वा रेखाः पूर्वापराः धनात्मिकास्तथा यय रेखातः अधः सर्वा पूर्वापररेखाः ऋणात्मिकाः।

तेन म$_{१}$ प$_{१}$, म$_{२}$ प$_{२}$ धनात्मिकास्तथा म$_{३}$ प$_{३}$, म$_{४}$ प$_{४}$ ऋणात्मिकाः।

प्र. १६ अथकोणस्य ज्यादीनां धनत्वम् ऋणत्वं च प्रदर्श्यते।

अत्र प्रथमपदे प$_{१}$ ओम$_{१}$ कोणस्य अ तुल्यस्य सर्वा ज्यादयः प्रदर्श्यन्ते तेन

$$ज्या = \frac{प_{१}म_{१}}{ओप_{१}}, \text{ कोज्या } अ = \frac{ओम_{१}}{ओप_{१}}, \text{ स्प } अ = \frac{प_{१}म_{१}}{ओम_{१}}$$

$$कोस्प\ अ, = \frac{ओम_{१}}{प_{१}म_{१}}, \text{ छे } अ = \frac{ओप_{१}}{ओम_{१}}, \text{ कोछे } अ = \frac{ओप_{१}}{म_{१}प_{१}}$$

अत्र सर्वत्र ओप रेखाया धनत्वमेव स्वीक्रियते तेन प्रथमपदे प$_{१}$ म$_{१}$ रेखायाः धनत्वात् ज्या धनात्मिका, एवं ओम$_{१}$ रेखायाः धनात्मकत्वात् कोटि ज्यापि धनात्मिका ततः प$_{१}$ म$_{१}$ ओम$_{१}$ द्वयोरपि धनात्मिकयोः स्पर्शरेखापि धनात्मिका। एवं सर्वाः ज्या कोटि ज्या स्पर्शरेखा, कोटि स्पर्शरेखा, छेदनरेखा, कोटि च्छेदनरेखाः धनात्मिका एव।

द्वितीयपदे प$_{२}$ म$_{२}$ इत्यस्याः धनत्वात् ज्या धनात्मिका परञ्च ओम$_{२}$ इत्यस्याः ऋणात्मकत्वात् कोटि ज्या ऋणात्मिका ततः स्पर्शरेखापि ऋणात्मिका ज्याकोटि ज्ययोर्मध्ये एकस्याः ऋणात्मकत्वात्।

एवं तृतीयपदे प$_{३}$ म$_{३}$, ओम$_{३}$ रेखे ऋणात्मिके तेन ज्या कोटि ज्ये द्वेऽपि ऋणात्मिके केवलं स्पर्शरेखा धनात्मिका।

चतुर्थ पदे तु प$_{४}$ म$_{४}$ इत्यस्या ऋणात्मकत्वात् ज्या ऋणात्मिका परञ्च ओम$_{४}$ इत्यस्याः धनात्मकत्वात् कोटि ज्यका धनात्मिका अत एव स्पर्शरेखापि ऋणात्मिकैव।

धनर्णविधाने यस्मिन्कस्मिन्नपि पदे या स्थितिर्ज्यायाः सैव कोटि च्छेदनरेखायाः।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

एवं या स्थितिः कोटिज्यायाः सैव छेदनरेखायाः। एवं या स्थितः स्पर्शरेखायाः सैव कोटिस्पर्शरेखायाः तेन कोटि स्पर्श-छेदन-कोटि च्छेदन-रेखाणां पृथक् पृथक् धनर्णनिर्देशो न कृतः।

एतेनेदं जातम्

२प	१प
+ ज्या	+ ज्या
− कोज्या	+ कोज्या
− स्प	+ स्प
३प	४प
− ज्या	− ज्या
− कोज्या	+ कोज्या
+ स्प	− स्प

प्र० १७ कोज्या अ $= \sqrt{१ - ज्या^२अ}$ अत्र यद्यपि मूलं धनात्मकम् ऋणात्मकञ्च भवति परमत्र अ कोणो यदि नवत्यंशाल्पस्तदा मूलं धनमेव परञ्च कोणमानस्य परीक्षया धनत्वम् ऋणत्वं वा ज्ञेयम्। अत्र व्याप्त्यर्थं किञ्चिदुदाहरणं दीयते–

उ. १ यदि कोज्या १२६° ५३′ $= -\frac{३}{५}$ तदा १२६° ५३′ अस्य ज्या तथा कोटि स्पर्शरेखा च साध्या।

यतः ज्या^{२}अ + कोज्या^{२}अ = १ अत्र अ कोणस्य यत्किञ्चिन्मानं भवेत्तेन ज्याअ $= \pm\sqrt{१ -}$ कोज्या^{२}अ अत्र ज्ञायतां अ कोणं तेनात्र अकोणकर्त्री रेखा द्वितीयपदे वर्त्तते। अतः मूलचिह्नस्य प्राक् + चिह्नं स्थाप्यं द्वितीयपदे जीवायाः धनत्वात्।

$$\therefore \text{ ज्या } १२६°\ ५३' = +\sqrt{१ - \frac{९}{२५}} = +\sqrt{\frac{१६}{२५}}$$

$$= \frac{४}{५}, \text{ एवं कोस्प } १२६°\ ५३' = \frac{\text{कोज्या } १२६°\ ५३'}{\text{ज्या } १२६°\ ५३'}$$

$$= \left(-\frac{३}{५}\right) \div \left(\frac{४}{५}\right) = -\frac{३}{४}$$

उदा० २ यदि स्पअ $\frac{१५}{८}$ तदा ज्या कोटिज्ये साध्ये।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

अत्र अकोणकर्त्री रेखा द्वितीयपदे चतुर्थपदे वा भविष्यति यतः स्पर्शरेखा तयोरेव पदयोः ऋणात्मिका भवति, अत अकोणकर्त्री कर्ण-

रूपारेखा = $\sqrt{(१५)^२ + (८^२)} = \sqrt{२८९} = १७$

यतः द्वितीयपदे ज्याअ = $\frac{१५}{१७}$ कोटिज्या च= $-\frac{८}{१७}$

तथा चतुर्थपदे ज्याअ=$-\frac{१५}{१७}$, कोज्याअ = $\frac{८}{१७}$ अतः अस्पर्शरेखायां अज्यायाः अकोटिज्यायाश्च द्विविधं मानम्।

यदि तत्र कोणकर्त्र्याः कर्णरूपरेखायाः ज्ञानं भवेद्यदियममुकपदेऽस्ति तदा कोणज्यायाः कोटिज्यायाया वा धनत्वम् ऋणत्वं वा सुखेन ज्ञातुं शक्यते।

(१०) अत्राभ्यासार्थ प्रश्नाः।

१. यदि ज्या १२०° = $\frac{\sqrt{३}}{२}$, तदा स्प १२०° साध्यताम्।

२. यदि स्प १३५° = – १ तदा ज्या १३५° साध्यताम्।

३. यदि स्प २४०° = $\sqrt{३}$ तदा कोज्या २४०° साध्यताम्।

४. यदि अ = २०२° ३७′ तथा ज्याअ = $-\frac{५}{१३}$

तदा कोज्याअ तथा कोस्पअ साध्येताम्।

५. यदि अ = १४३°८′ तथा कोछेअ = १$\frac{२}{३}$

तदा छेअ, स्पअ साध्येताम्।

६. यदि अ = २१६° ५२′ तधा कोज्याअ = $-\frac{४}{५}$

तदा कोस्पअ, ज्याअ साध्ये।

७. यदि छे $\frac{२ग}{३}$ = – २ तदा ज्या $\frac{२ग}{३}$ तथा कोस्प $\frac{२ग}{३}$ साध्ये।

८. यदि ज्या$\frac{५ग}{४}$ = $-\frac{१}{\sqrt{२}}$, तदा स्प$\frac{५ग}{४}$ तथा छे $\frac{५ग}{४}$साध्ये।

९. यदि कोज्याअ = $\frac{१२}{१३}$तदा ज्याअ तथा स्पअ माने साध्ये।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

अथ ९०° वा $\frac{ग}{२}$ इत्यस्य त्रैकोणमितिकप्रपञ्चः।

प्र० १८ अत्र परिभाषाबलेनैव ज्या पओम $=\frac{मप}{ओप}$, कोज्या पओम$=\frac{ओम}{ओप}$

स्पपओम $= \frac{मप}{ओम}$, यदि कल्प्यते पओम कोणः क्रमशो वर्धते तदा मप इत्यस्या वर्धनं तथा ओम रेखायाः क्षीणत्वं स्पष्टम्। एवं यदा पओमकोणः = ९०° तदा ओम इत्यस्याः नाशः किन्तु

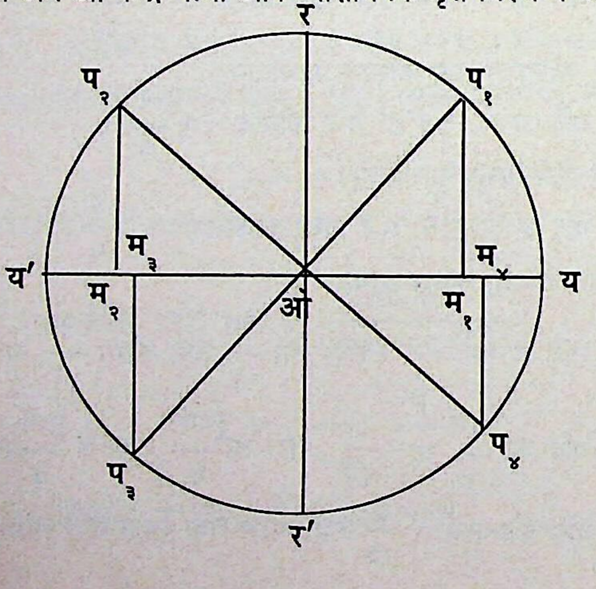
$$मप = ओप \text{ अतः ज्या } ९०° = \frac{ओप}{ओप} = १; \text{ कोज्या } ९०° = \frac{०}{ओप} = ०$$

$$स्पअ\ ९०° = \frac{मप}{ओम} = \frac{ओप}{०} = \infty$$

$$कोस्प\ ९०° = \frac{१}{स्प९०°} = \frac{१}{\infty} = ०$$

$$छे\ ९०° = \frac{१}{कोज्या९०°} = \frac{१}{०} = \infty; कोछे९०° = \frac{१}{ज्या९०°} = १$$

प्र० १९ ०° कोणतः ३६०° कोणपर्यन्तं ज्यायाः स्थितिदर्शनम्। कल्प्यतां ओप = त्रि अथ ओ केन्द्रं मत्वा ओप व्यासार्धेनैकं वृत्तं विरचय्य ओप रेखाया



RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

भ्रमणेन चतुर्षुपदेषु अकोणं निर्माय ततः प बिन्दोः यर्यं रेखोपरि लम्बाः कृतास्सन्ति।

ततः ज्याअ $= \frac{मप}{ओप} = \frac{मप}{त्रि}$ परन्त्वत्र त्रि रेखायाः प्रमाणं धनत्वं च निश्चितम् तेन केवलं मप रेखायाः परिवर्त्तनमेव विचारणीयमस्ति यतः प बिन्दुरेव भ्रमति।

यदा अ = ०°, मप = ०, तदा ज्या ०° $= \frac{०}{त्रि} = ०$

प्रथमपदे म$_१$ प$_१$ धनं तथा वर्धिष्यमाणा ∴ ज्याअ धनात्मिका तथा बर्धिष्यमाणा अथ यदा अ = ९०°, म$_१$ प$_१$ =त्रि, तदा ज्या ९०°$=\frac{त्रि}{त्रि} = १$

द्वितीयपदे म$_२$ प$_२$ धनं तथा क्षीयमाणा ∴ ज्याअ धनात्मिका तथा क्षीयमाणा यदा अ = १८०°, म$_२$ प$_२$ = ०, तदा ज्या १८०° $= \frac{म_२ प_२}{त्रि} = ०$

तृतीयपदे म$_३$ प$_३$ ऋणं तथा क्षीयमाणा∴ज्याअ ऋणं तधा क्षीयमाणा यदा अ=२७०°, म$_३$ प$_३$ = त्रि परन्तु ऋणात्मका तेन ज्या२७०°$=\frac{त्रि}{त्रि} = -१$

चतुर्थपदे म$_४$ प$_४$ ऋणं तथा क्षीयमाणाः ∴ ज्याअ = ऋणात्मिका तथा क्षीयमाणा यदा अ = ३६०°, म$_४$ प$_४$ = ०, तदा ज्या ३६०° $= \frac{०}{र} = ०$

ज्या ९०° = १

ज्या १८०° = ०			ज्या ०° = ०
एतानि फलानि क्षेत्र संस्थयापि प्रकाश्यन्ते	ज्याअ धनात्मिका क्षीयमाणाच	ज्याअ धनात्मिका वर्धिष्यमाणा च	
	ज्याअ ऋणात्मिका तथा वर्धिष्यमाणा	ज्याअ ऋणात्मिका क्षीयमाणा च	

ज्या २७०° = –१

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

एवं कोटिज्याया अपि चतुर्षु पदेषु ज्ञानं कार्यम्, सा चैवं भवति

कोज्या ९०° = ०

कोज्या १८०° = -१			कोज्या ०° = १
	कोज्याअ ऋणात्मिका तथा उपचीयमाना	कोज्याअ धनात्मिका तथा क्षीयमाणा	
	कोज्याअ ऋणात्मिका तथापचीयमाना	कोज्याअ धनात्मिका तथोपचीयमाना	

कोज्या २७०° = ०

०° कोणतः ३६०° कोणपर्यन्तं स्पर्शरेखायाः प्रमाणं धनर्णत्वं च।

प्र० २०. स्पअ = $\frac{\text{मप}}{\text{ओप}}$ अत अस्याः परिवर्त्तनं भाज्यहरयोरस्थिरयोरूपरि वर्त्तते यदि अ = ०°, मप = ०, ओम = र, अतः स्प ०° = $\frac{०}{\text{र}}$ = ०

प्रथमपदे मप धनात्मिकोपचीयमाना च
ओम धनात्मिकापचीयमाना च
∴ स्पअ धनात्मिकोपचीयमाना च

यदा अ = ९०°, मप = र, ओम = ०, ∴ स्प ९०° = $\frac{\text{र}}{०}$ = ∞

द्वितीयपदे मप धनात्मिकापचीयमाना च
ओम ऋणात्मिकोपचीयमाना च
तेन स्पअ ऋणात्मिकापचीयमाना च

यदि अ = १८०°, मप = ०, ∴ स्प १८०° = ०

तृतीयपदे मप ऋणात्मिकोपचीयमाना च
ओम ऋणात्मिकापचीयमाना च
तेन स्पअ धनात्मिकोपचीयमाना च

यदि अ = २७०°, ओम = ०; ∴ स्प २७०° = ∞

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

चतुर्थपदे मप ऋणात्मिकापचीयमाना च ओम धनात्मिकोपचीयमाना च

∴ स्पअ ऋणात्मिका तथापचीयमाना

यदा अ = ३६०°, मप = ०, ∴ स्प ३६०° = ०

क्षेत्रसंस्था यथा

स्प ९०° = ∞

स्प १८०° = ०			स्प ०° = ०
	स्पअ ऋणात्मिका तथापचीयमाना	स्पअ धनात्मिका तथोपचीयमाना	
	स्पअ धनात्मिका तथोपचीयमाना	स्पअ ऋणात्मिका तथापचीयमाना	

स्पअ २७०° = ∞

(११) अभ्यासार्थं कानिचिदुदाहरणानि—

निम्नलिखितानां प्रश्नानां प्रमाणं धनर्णत्वं च प्रदर्शय

१. कोस्पअ ०° कोणतः ३६०° कोणपर्यन्तम्।

२. कोछेअ, ०° कोणतः n कोणपर्यन्तम्।

३. कोज्याअ, १८०° कोणतः २n पर्यन्तम्।

४. स्पअ ९०° तथा २७०° मध्ये।

५. छेअ, $\frac{n}{२}$ तथा $\frac{n}{३}$ मध्ये।

अधस्तनानां मानमानीयताम्—

६. कोज्या ०° ज्या^{२} २७०° − २ कोज्या १८०° स्प ४५°

७. ३ज्या ०° छे १८०° + २ कोछे ९०° − कोज्या ३६०°

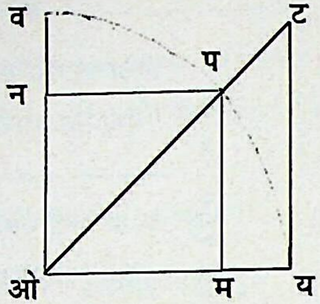
८. २ छे^{२} n कोज्या ०°+३ ज्या^{३} $\frac{३n}{२}$ − कोछे $\frac{n}{२}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

९. स्प कोज्या $\frac{३n}{२}$ + छे २n – कोछे $\frac{३n}{२}$

प्र० २१ भारतीयैः गणकैस्तथा प्राचीनकाले युरोपीयगणितज्ञैश्च त्रिकोणमितिसम्बन्धाः चापीया एव स्वीकृताः, तत्र रेखा सम्बन्धो न स्वीकृतः यथात्र ओप व्यासार्धेन कृते वृत्तखण्डे पविन्दोः ओय, ओव रेखयोरूपरि मप, पन लम्बौ कृतौ एवं य विन्दोः ओय रेखोपरि यट लम्बः यश्च ओप वर्धितरेखायां ट विन्दौ मिलति तदा प्राचीनानां परिभाषया ज्यायप =पम, यप चापस्य पव कोटिः तेन कोज्या

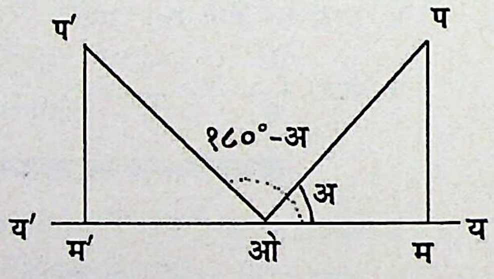


यप = पन = ओम। ओप = त्रिज्या, स्पयप = यट, छेयप = ओट, उत्क्रमज्यायप = मय तथा कोट्युत्क्रमज्या यप = वन।

चापीयज्यादिसम्बन्धे व्यासार्धस्य कोणमानस्य चापेक्षा वर्त्तते। भारते ज्याकोटिज्यादीनां प्रचारश्च प्रचीनसमयादेवास्ति यत आर्यभट ग्रन्थेः ज्यायाः सारणी चापि मिलति परन्तु युरोपदेशे १७४८ इशवीये इउलर EULER महाशयगणकेन प्रथमतः ज्याकोटिज्यादीनां प्रचारः कृतः यश्चेदानीं प्रचरितोऽस्ति।

प्र० २२ अथ १८०° – अ, अस्य ज्यादयः

कल्प्यतां यर्य काचिद्रेखा यया सह ओप-रेखा भ्रमणेन



अकोणं निर्माति, एवं सैव रेखा य′ विन्दोर्विलोमभ्रमणेन य′ओप′ कोणं अकोणतुल्यं निर्माति, तथा प, प′ बिन्दोः यय′ रेखोपरि पम, प′म′ लम्बौ कार्यौ।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

तदा ओम′प′, ओमप त्रिभुजौ सर्वथा तुल्यौ (रे १।२६)

अथात्र परिभाषया ज्या (१८०° − अ) = $\frac{\text{म′प′}}{\text{ओप′}}$, परन्तु म′प′ = मप

द्वापि धनात्मकौ तेन ज्या (१८०° − अ) = $\frac{\text{मप}}{\text{ओप}}$ = ज्याअ, पुनः

कोज्या (१८०° − अ) = $\frac{\text{ओम′}}{\text{ओप′}}$ परन्तु ओम′ = ओम, परन्तु दिशया

भिन्ना तेन कोज्या (१८०° − अ) = $\frac{-\text{ओम}}{\text{ओप}} = -\frac{\text{ओम}}{\text{ओप}}$ = − कोज्याअ

पुनः स्प (१८०° − अ) = $\frac{\text{म′प′}}{\text{ओम′}} = \frac{\text{मप}}{-\text{ओम}} = -\frac{\text{मप}}{\text{ओम}}$ = − स्प

अत्र यद्यपि अकोणं समकोणादल्पं स्वीकृत्य क्षेत्रे प्रदर्शितं परन्तु अकोणस्य समकोणादधिकेऽपि माने स्थितिरेवंविधैव भवति; सार्वत्रिकस्थितावुपपत्तिः पूर्वमेव प्रदर्शितास्ति। एतानि फलानि एवमपि लिख्यन्ते।

ज्या (१८०° − अ) = ज्याअ

कोज्या (१८०° − अ) = − कोज्याअ

स्प (१८०° − अ) = − स्पअ

कोणोनभार्धांशाः तस्य कोणस्य स्पर्धीत्युच्यते ∴ कोणज्या स्पर्धिज्या-तुल्या भवति, कोणकोटिज्या ऋणात्मिका स्पर्धिकोटिज्या कोणस्पर्शरेखा = ऋणस्पर्धिस्पर्श रेखा।

उ. १ १२०° ज्याकोटिज्ये साध्ये

ज्या १२०° = ज्या (१८०° − ६०°) = ज्या ६०° = $\frac{\sqrt{३}}{२}$

कोज्या १२०° = कोज्या (१८०° − ६०°) = − कोज्या ६०° = − $\frac{१}{२}$

उ २. $\frac{५\pi}{६}$ अस्य कोटिज्या कोटिस्पर्श रेखे साध्ये

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

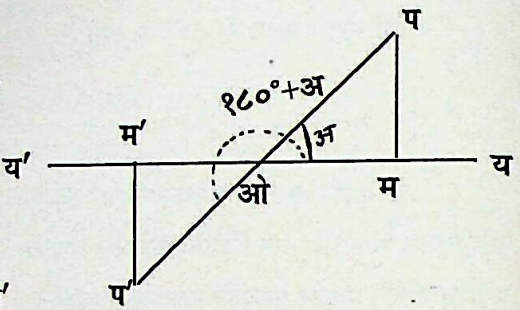
CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{कोज्या}\ \frac{५n}{६} = \text{कोज्या}\ (n- \frac{n}{६}) = -\text{कोज्या}\frac{n}{६} = -- \frac{\sqrt{३}}{२}$$

$$\text{कोस्प}\ \frac{५n}{६} = \text{कोस्प}\ (n- \frac{n}{६}) = -\ \text{कोस्प}\ \frac{n}{६} = -\sqrt{३}$$

प्र० २३. १८०° + अ अस्य ज्याकोटिज्यादयः

कल्प्यतां ओप रेखा ओय रेखया भ्रमणेन अ कोणं निर्माति। पुनः ओय′ रेखया मिलित्वा ओय′ रेखया अ कोणतुल्यं य′ ओप′ कोणं भ्रमणेन करोति तदा प, प′ विन्द्वोः पम प′म′ लम्बौ यय′ रेखोपरि निपात्यौ



तदा मओप, म ′ओप′ त्रिभुजे तुल्ये भवतः (रे १। २६ क्षे०)

$$\text{तदा परिभाषया ज्या}\ (१८०° + \text{अ}) = \frac{\text{म′प′}}{\text{ओप′}}$$

परन्तु म′प′ = मप तथा दिशया विरूद्धौ तेन।

$$\text{ज्या}\ (१८०° + \text{अ}) = \frac{-\text{मप}}{\text{ओप}} = -\ \frac{\text{मप}}{\text{ओप}} = -\ \text{ज्याअ।}$$

$$\text{पुनः कोज्या}\ (१८०° + \text{अ}) = \frac{\text{ओम′}}{\text{ओप′}} \quad \text{अत्रापि ओम′ = ओम}$$

परन्तु दिशया विरूद्धौ तेन

$$\text{कोज्या}\ (१८०° + \text{अ}) = \frac{\text{ओम′}}{\text{ओप′}} = -\ \frac{\text{ओम}}{\text{ओप}} = -\ \text{कोज्या अ।}$$

$$\text{तथा स्प}\ (१८०° + \text{अ}) = \frac{\text{म′प′}}{\text{ओम}} = \frac{-\text{मप}}{-\text{ओम}} = \frac{\text{मप}}{\text{ओम}} = \text{स्पअ}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

एतानि एवमपि लिख्यन्ते—

ज्या (π+अ) = – ज्याअ

कोज्या(π+अ)=–कोज्याअ

स्प (π+अ) = स्पअ

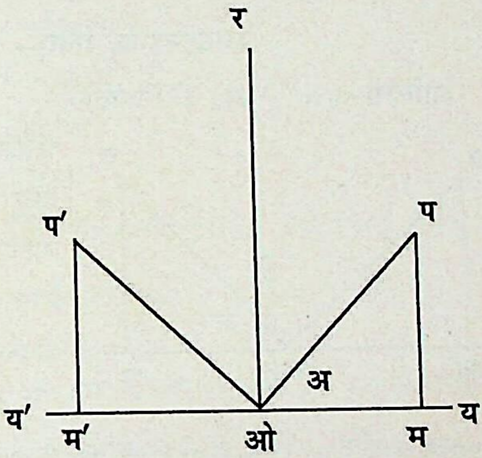
अस्मादिदमवगम्यते यत् कोणमाने समकोणद्वयं युज्यते तस्मात् वियुज्यते वा स्पर्शरेखामाने किमपि परिवर्त्तनं न हि भवति।

उ० १. २१०° अत्र कोटिस्पर्श रेखामानं किम्?

कोस्प २१०° = कोस्प (१८०° + ३०°) = कोस्प ३०° = $\sqrt{३}$

प्र० २४ ९०° + अ अस्य ज्यादयः

कल्प्यतां ओप-रेखा भ्रमणेन यओप कोणं निर्माति पुनः ओर रेखायां ९०° परिपूर्य पुनस्तथैव अकोणतुल्यं रओप′ कोणं रचयति अतः यओप′= ९०° + अ ततः प, प′ विन्द्वोः यय′ रेखायां पम, प′म′ लम्बौ निपानीयौ तदा ∠पओय= ∠रओप′= ∠ ओप′म′ = अ



अतः ओपम, ओप′म′ त्रिभुजे तुल्ये (रे१। २६क्षे) अतः प′म′ = ओम तथैकदिशिकौ तथा ओम′ = पम परन्तु विरूद्धदिशिकौ

अतः परिभाषया ज्या (९०° + अ) = $\frac{\text{म′प′}}{\text{ओप′}}$ = $\frac{\text{ओम}}{\text{ओप}}$ = कोज्याअ

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{कोज्या } (९०^\circ + \text{अ}) = \frac{\text{ओम}'}{\text{ओप}'} = \frac{-\text{मप}}{\text{ओप}} = -\frac{\text{मप}}{\text{ओप}} = -\text{ज्याअ}$$

$$\text{स्प } (९०^\circ + \text{अ}) = \frac{\text{म}'\text{प}'}{\text{ओम}'} = -\frac{\text{ओम}}{\text{मप}} = \frac{\text{ओम}}{-\text{मप}} = -\text{कोस्पअ}$$

एतानि फलानि एवमपि लिख्यन्ते–

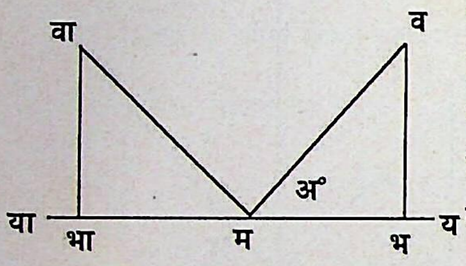
$$\text{ज्या } \left(\frac{n}{२} + \text{अ}\right) = \text{कोज्याअ}$$

$$\text{कोज्या } \left(\frac{n}{२} + \text{अ}\right) = -\text{ ज्याअ}$$

$$\text{स्प } \left(\frac{n}{२} + \text{अ}\right) = -\text{ कोस्पअ}$$

स्पष्टता के लिए–

शालिनी–(९०° + अ) की निष्पत्तियाँ–



मानलिया कि ∠ य म व = अ म बिन्दु पर ∠ व म वा = ९०° बनाया। तथा म व = मा वा काट लिया। व से व भ और वा से भा वा लम्ब खीचा।

अब क्योंकि ∠ भ म व + ∠ भा म वा = ९०°

तथा ∠ भ म व + ∠ भ व म = ९०°

∴ ∠ भ व म = ∠ भा म वा

तथा Δ भ व म और Δ भा म वा में–

∠ भ व म = ∠ भा म वा,

∠ व भ म = ∠ म भा वा (समकोण है)

∴ म व = म वा

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

∴ दोनों त्रिभुज प्रत्येक दशा में बराबर है।

∴ भा म = भ व,। भा वा = म भ।

∴ ज्या (९०° + अ°) = ज्या य म वा =

$$\frac{\text{भा वा}}{\text{म वा}} = \frac{\text{म भ}}{\text{म व}} = \text{कोज्या अ}^\circ$$

कोटि कोण और पूरक कणों की निष्पत्तियों के सम्बन्ध और कोज्या (९०° + अ) =

$$\text{कोज्या} \angle \text{य म वा} = \frac{\text{म भा}}{\text{म वा}} = \frac{-\text{भव}}{\text{म व}}$$

$$= -\ \text{ज्याअ}^\circ।$$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि–

स्प (९०° + अ) = – कोस्प अ°

कोस्प (९०° + अ) = – स्पअ°

छे (९०° + अ) = – कोछेअ°

कोछे (९०° + अ) = छे अ°

उ. १. १२०° ज्यायाः मानं किम्? ज्या १२०° = ज्या (९०° + ३०°)

$$= \text{कोज्या ३०}^\circ = \frac{\sqrt{३}}{२}$$

उ. २. स्प (२७०° + अ) तथा कोज्या ($\frac{३n}{२}$ + अ) माने के?

स्प (२७०° + अ) = स्प (१८०° +९०°+अ)=स्प (९०°+अ)=–कोस्पअ।

$$\text{कोज्या} \left(\frac{३n}{२} + \text{अ}\right) = \text{कोज्या} \left(n + \frac{n}{२} + \text{अ}\right)$$

$$= -\ \text{कोज्या} \left(\frac{n}{२} + \text{अ}\right) = \text{ज्याअ}।$$

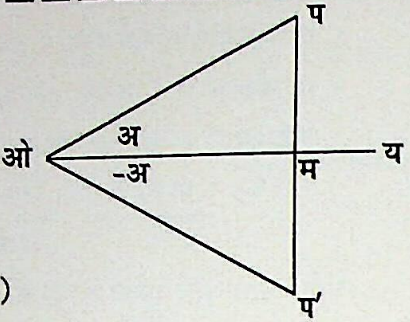
प्र० २५ **अथ–अ अस्य ज्यादयः**

कल्प्यतां काचिद्रेखा ओय अनया साकं भ्रमणेन ओप रेखा

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

अकोणं निर्माति एवं पुनर्विरूद्ध-भ्रमणेन ओप′ रेखा ओय रेखया सह-अकोणं रचयति। पप′ योजनीयौ तदा पम = प′म तथा म विन्दौ कोणौ समकोणतुल्यौ (रे१।४)



$$\text{तदा परिभाषया ज्या } (-\text{अ}) = \frac{\text{मप}'}{\text{ओप}'} = \frac{-\text{मप}}{\text{ओप}} = -\text{ज्याअ};$$

$$\text{कोज्या } (-\text{अ}) = \frac{\text{ओम}}{\text{ओप}'} = \frac{\text{ओम}}{\text{ओप}} = \text{कोज्याअ}$$

$$\text{स्पअ } (-\text{ अ}) = \frac{\text{मप}'}{\text{ओम}} = \frac{-\text{मप}}{\text{ओम}} = -\text{ स्पअ}$$

इदं विशेषतः स्मरणीयं यत् कोणस्य मानं धनम् ऋणं वा भवतु कोटिज्यामानं दिशया प्रमाणेन वा तथाविधमेव।

उ. १. कोछे (−२१०°) तथा कोज्या (अ−२७०°) के?

कोछे (−२१०°) = − कोछे २१०° = − कोछे (१८०°+३०°)=कोछे३०°=२

कोज्या (अ−२७०°) = कोज्या (२७०° −अ) =

कोज्या (१८०° + ९०° −अ) = − कोज्या (९०° − अ) = − ज्याअ

— o —

(१२) अभ्यासार्थ प्रश्नाः।

अधस्तनानां मानानि साध्यानि—

१. कोज्या १३५°. २. ज्या १५०°. ३. स्प २४०°.

४. कोछे २२५°. ५. ज्या (−१२०°). ६. कोस्प (−१३५°).

७. स्प $\frac{३\pi}{४}$ ८. ज्या $\frac{४\pi}{३}$ ९. कोछे $\left(\frac{-\pi}{६}\right)$

१०. कोस्प $\left(-\frac{५\pi}{६}\right)$ ११. कोज्या (२७०° + अ)

१२. कोस्प (२७०° −अ), १३. ज्या (अ−९०°)।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

निम्नस्थाः प्रश्नाः लघुतमरूपेण स्थाप्यन्ताम्

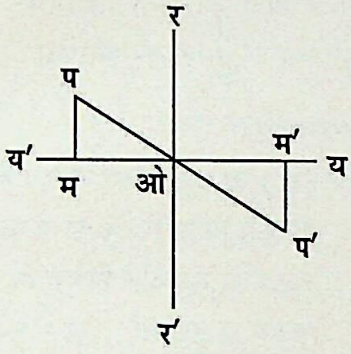
१४. स्प (१८०° + अ) ज्या (९०° + अ) छे (९०° –अ)।

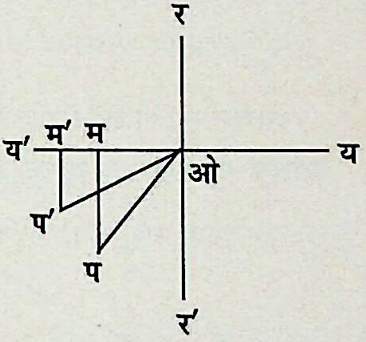
१५. कोज्या (९०°+अ)+ज्या (१८०°–अ)–ज्या(१८०°+अ)–ज्या(–अ)

१६. छे (१८०° + अ) छे (१८०° –अ) +
कोस्प (९०° + अ) स्प (१८०° + अ)

प्र० २६. ९०°—अ इत्यस्य ज्याकोटिज्यादयः।

इदानीं अ कोणस्य यस्मिन् कस्मिन्नपि माने उपपत्तिः प्रदर्श्यते।





कल्प्यतां काचित्कोणकर्त्री भ्रमन्ती त्रिज्या रेखा ओय रेखया अ कोणं निर्माति यदा अस्याः स्थितिः ओप द्वयोरपि क्षेत्रयोः अस्ति।

पुनः सैव कोणकर्त्री रेखा यओ रेखया ९०° कोणमुत्पाद्य ओर रेखायां स्थितिं विधाय पुनर्विलोमभ्रमणेन अ कोणं निर्माति तदा अस्याः स्थितिः ओप′ रेखायां क्षेत्रद्वये भवति।

यय′ रेखोपरि पम, प′म′ लम्बौ विधेयौ तदा अ कोणस्य यत्किञ्चिन्मानं भवतु ओप′म′ कोणः पओम तुल्यो भवति तथा ओमप, ओम′प′ त्रिभुजे अपि रेखागणितेन तुल्ये भवतः यत्र मप = ओम′, तथा ओम = म′प′।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

यदा प, यय′ रेखातः उपरि, तदा प′, रर′ रेखातो दक्षिणपार्श्वे एवं यदा प, यय′ रेखातोऽधः तदा प′, रर′ रेखातो वामभागे।

एवं यदा प′ यय′ रेखातः उपरि तदा प, रर′ रेखातो दक्षिणे। तथा यदा प′, यय′ रेखातोऽधः तदा प, रर′ रेखातो वामपार्श्वे

अतः मप = ओम′ तथा द्वावप्येकदिक्कौ

तथा म′प′ = ओम तथा द्वावप्येकदिक्कौ

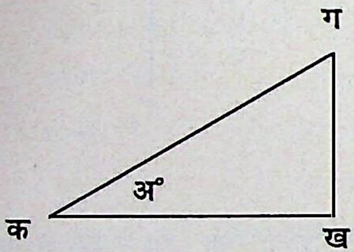
$$\text{तदा परिभाषया ज्या } (९०° - \text{अ}) = \frac{\text{म}'\text{प}'}{\text{ओप}'} = \frac{\text{ओम}}{\text{ओप}} = \text{कोज्याअ},$$

$$\text{कोज्या } (९०° - \text{अ}) = \frac{\text{ओम}'}{\text{ओप}'} = \frac{\text{मप}}{\text{ओप}} = \text{ज्याअ}$$

$$\text{स्प } (९०° - \text{अ}) = \frac{\text{म}'\text{प}'}{\text{ओम}'} = \frac{\text{ओम}}{\text{मप}} = \text{कोस्पअ}$$

एतादृशी युक्तिः सर्वत्र दातुं शक्यते अत्राध्याये।

शालिनी-यहाँ संक्षेप एवं सुस्पष्टरीति से (९०°-अ°) का मान दर्शाया जा रहा हैं-



कल्पना किया कि क ख ग एक न्यूनकोण समकोण त्रिभुज है। जिसमें ∠क=अ° ∠ख = ९०° (समकोण) ∴ कोण∠ग=९०°-अ° ∴ ∠क ग ख, ∠ख क ग का कोटिपूरक कोण हैं।

$$\therefore \text{ ज्या } (९०° - \text{अ}°) = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{क ख}}{\text{क ग}} = \text{कोज्याअ}°$$

$$\text{कोज्या } (९०° - \text{अ}°) = \frac{\text{ख ग}}{\text{क ग}} = \text{ज्याअ}°$$

$$\text{स्प } (९०° - \text{अ}°) = \frac{\text{क ख}}{\text{ख ग}} = \text{कोस्पअ}°$$

इसी प्रकार शेष सभी का मान निकाला जा सकता है।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्र० २७ न ३६०° + अ इत्यस्य ज्यादयः।

यदि न काचित्पूर्णसंख्या, तदा न. ३६०° प्रकाशयति कोणकर्त्र्याः रेखायाः न वारं पूर्णभ्रमणं अतः न. ३६०° + अ अस्य त्रैकोणमितिकमानं तदेव यत् स्वतन्त्रस्य अ कोणस्य, दिशायामपि न किञ्चिदन्तरम्।

प्र० २८. न.३६०°–अ अत्रापि त्रैकोणमितिकं तदेव फलं यत्–अ इत्यस्य।

अतः ज्या (न. ३६०° –अ) = ज्या (–अ) = –ज्याअ

कोज्या (न. ३६०° –अ) = कोज्या (–अ) = कोज्याअ

स्प (न. ३६०° –अ) = स्प (–अ) = –स्पअ

वयं कस्यापि कोणस्य त्रैकोणमितिकफलप्रदर्शने धनन्यूनकोणस्यैव फलप्रदर्शनं कुर्मस्तेन सर्वत्रैवैका सरला प्रयोज्या रीती रक्षिता भवति।

यदा कोणः ऋणात्मकस्तदा–अ, अ अनयोः सम्बन्धः संग्राह्यः

(१) यथा ज्या (–३०°) = –ज्या ३०° = – $\frac{१}{२}$

कोज्या (–८४५°) = कोज्या ८४५°

(२) यदा कोणः ३६०° एभ्योऽधिकस्तदा पूर्णसंख्यागुणित ३६०° तस्मादपनीय क्रिया कार्या।

यथा स्प ७३५° = स्प (२ x ३६०° + १५°) = स्प १५°

(३) यदि कोण १८०° एभ्योऽधिकस्तदा १८०° + अ, अ अनयोः सम्बन्धेन क्रिया प्रदर्शनीया।

यथा कोस्प ५८५° = कोस्प (३६०° + २२५°) = कोस्प २२५°

= कोस्प (१८०° + ४५°) = कोस्प ४५° = १

(४) यदि कोणः ९०° एभ्योऽधिकस्दा १८०° –अ, तथा अ, अनयोः फलयोः सम्बन्धः प्रयोक्तव्यः,

यथा कोज्या ६७५°

= कोज्या (३६०° + ३१५°) = कोज्या ३१५°

= कोज्या (१८०° + १३५°) = –कोज्या १३५°

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$= -$कोज्या $(१८०° - ४५°) =$ कोज्या $४५° = \frac{१}{\sqrt{२}}$

उ. १. ज्या $(-११९०°)$, स्प $१०००°$, कोज्या $(-३८६०°)$

एता धनन्यूनकोणफलस्वरूपे प्रदर्श्यन्ताम्।

ज्या $(-११९०°) = -$ज्या $११९०°$ $-$ज्या $(३ \times ३६०° + ११०°) =$

$-$ज्या $११०° = -$ज्या $(१८०° - ७०°) = -$ ज्या $७०°$

स्प $१०००° =$ स्प $(२ \times ३६०° + २८०°) =$ स्प $२८०°$

$=$ स्प $(१८०° + १००°) =$ स्प $१००°$

$=$ स्प $(१८०° - ८०°) = -$स्प $८०°$

कोज्या $(-३८६०°) =$ कोज्या $३८६०° =$ कोज्या $(१० \times ३६०°$

$+ २६०°) =$ कोज्या $२६०° =$ कोज्या $(१८०° + ८०°)$

$= -$कोज्या $८०°$,

।।इति।।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्र०२९. वर्णितप्रपञ्चैरिदं स्पष्टं यत् कोणानां संख्याः भिन्नाः येषां त्रैकोणमितिकफलं एकमेव। यथा यदि स्पअ=१ तदा अमानं ४५° अथवा २२५°.

ज्ञातफलानां सद्यो ज्ञानार्थमत्रैका सारणीं दीयते–

कोणः	०°	३०°	४५°	६०°	९०°	१२०°	१३५°	१५०°	१८०°
ज्या	०	$\frac{१}{२}$	$\frac{१}{\sqrt{२}}$	$\frac{\sqrt{३}}{२}$	१	$\frac{\sqrt{३}}{२}$	$\frac{१}{\sqrt{२}}$	$\frac{१}{२}$	०
कोज्या	१	$\frac{\sqrt{३}}{२}$	$\frac{१}{\sqrt{२}}$	$\frac{१}{२}$	०	$-\frac{१}{२}$	$-\frac{१}{\sqrt{२}}$	$-\frac{\sqrt{३}}{२}$	-१
स्प	०	$\frac{१}{\sqrt{३}}$	१	$\sqrt{३}$	∞	$-\sqrt{३}$	-१	$-\frac{१}{\sqrt{३}}$	०
कोस्प	∞	$\sqrt{३}$	१	$\frac{१}{\sqrt{३}}$	०	$-\frac{१}{\sqrt{३}}$	-१	$-\sqrt{३}$	∞
छे	१	$\frac{२}{\sqrt{३}}$	$\sqrt{२}$	२	∞	-२	$-\sqrt{२}$	$-\frac{२}{\sqrt{३}}$	-१
कोछे	∞	२	$\sqrt{२}$	$\frac{२}{\sqrt{३}}$	१	$\frac{२}{\sqrt{३}}$	$\sqrt{२}$	२	∞

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

अभ्यासार्थं प्रश्नाः

(१३) निम्नस्थानामङ्कत्मकं मानं किम?

१ कोज्या ४८०°   २. ज्या ९६०°   ३. कोज्या (–७८०°)

४. छे ९००°   ५. कोस्प ८४०°   ६. कोछे (–७६५°)

७. कोज्या ४००५°   ८. ज्या ३०१५°   ९. ज्या $\frac{१५\pi}{४}$

१०. कोस्प $\frac{२३\pi}{४}$ ११. छे $\frac{७\pi}{३}$ १२. छे $\left(\frac{३\pi}{२}+\frac{\pi}{३}\right)$

निम्नस्थप्रश्नेषु ३६०° तः सर्वं न्यूनकोणमानं दर्शितव्यम्।

१३. कोज्या अ = $\frac{\sqrt{३}}{२}$,   १४. ज्या अ = – $\frac{१}{२}$,

१५. स्पअ = – $\sqrt{३}$,   १६. कोस्प अ = –१

साध्यन्ताम्–

१७. स्पअ + स्प (१८०° –अ) + कोस्प (९०° + अ) = स्प (३६०° –अ)

१८. $\frac{\text{ज्या (१८०° –अ)}}{\text{स्प (१८०°+अ)}} \times \frac{\text{कोस्प (९०° –अ)}}{\text{स्प (९०° + अ).}} \times \frac{\text{कोज्या (३६०° –अ)}}{\text{ज्या (–अ)}}$ = ज्याअ.

लघूक्रियताम्–

१९. $\frac{\text{ज्या (–अ)}}{\text{ज्या (१८०°+अ)}} - \frac{\text{स्प (९०°+अ)}}{\text{कोस्पअ}} + \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{ज्या (९०° +अ)}}$

२०. $\frac{\text{कोज्या (९०°+अ) छे (–अ) स्प (१८०° –अ)}}{\text{छे (३६०°+अ) ज्या (१८०°+अ) कोस्प (९०° –अ)}}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

२१. साध्यताम् ज्या $(\frac{\pi}{२}+अ)$ कोज्या $(\pi - अ)$ कोस्प$(\frac{३\pi}{२}+अ)$

$$= ज्या\ (\frac{\pi}{२} - अ) ज्या\ (\frac{३\pi}{२} - अ)\ कोस्प\ (\frac{\pi}{२} + अ)$$

२२. यदि $अ = \frac{११\pi}{४}$ तदा $ज्या^२अ - कोज्या^२अ + २\ स्पअ - छे^२अ$

अत्र संख्यात्मकं मानं किम्?

— ० —

षष्ठाध्यायः

प्र० ३० कोणज्यादीनां ज्ञानात् कोणस्य साधारणमान-ज्ञानायोपायः।

परिभाषया इदं स्पष्टं यत् कोणज्ञाने कोणज्याज्ञानं स्पष्टमेव। अस्य विपरीतकथनम् अर्थात् कोणज्याज्ञाने कोणमानं स्पष्टमिति न शुद्धम् यतो हि कस्या अपि ज्यायाः कोणमानं नैकं स्थिरम् यथा कल्प्यते ३०°,

१५०°, ३९०°, – २१०° एतेषामंशानां ज्या तु $\frac{१}{२}$ एतत्तुल्या अतः

$\frac{१}{२}$ ज्यास्वरूपदर्शनेनैतत्कथनं कठिनं यदियं ज्या, ३०° उत वा १५०° अथवा ३९०° वा–२१०° अंशानाम्। अत्र केवलमेतदेव कथयितुं शक्यते यदेभ्यः किमपि मानं निर्दिष्ट जीवाया अस्ति।

एवमेव कोटिज्या, स्पर्शरेखा वा निर्दिष्टा भवतु तद्वशेन निश्चित-

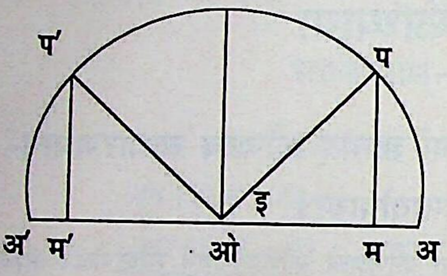
RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

कोणज्ञानं दुर्घमेव अतः केवलं ज्यादीनां ज्ञानात् निश्चितकोणज्ञानं संशयास्पदम्।

कल्प्यतां ओप भ्रमन्ती रेखा ओअ स्थिररेखया संलग्ना तदा वयं एतदेव जानीमः यत् ०, वा १, वा २, वा ३ पूर्णभ्रमणं धनात्मकमधनात्मकं वा सञ्जातम् न किञ्चिन्निश्चितम् परन्तु यदिदं ज्ञानं भवेद्यदनया एकं पूर्णभ्रमणं कृतं तदाऽनया ३६०° कोणमानं = २ π निर्मितमिति। एवमेव भ्रमन्ती ओप रेखा यदि ओअ रेखया द्विवारं पूर्णं सङ्गच्छते तदा ४ π कोणम् एवं त्रिवारपूर्णभ्रमणे ६ π कोण-मुत्पादयति। क्रमभ्रमणे धनकोणं विरूद्धभ्रमणे ऋणात्मककोणमानं निर्माति अतः पूर्णभ्रमणे कोणस्वरूपाणि ०, वा $\pm$ २ π, वा $\pm$ ४ π अथवा $\pm$ ६ π अतः साधारणरूपेणैवं कथ्यते यद्भ्रमन्ती ओप रेखा ओअ रेखया सह पूर्णभ्रमणेन- २ π वा २ न π कोणं निर्माति यत्र न काचित्पूर्णसंख्या धनात्मिका ऋणात्मिका वा।

प्र० ३१ कस्याश्चिज्जीवायाः सरलकोणज्ञानाय नियमः।



कल्प्यतां अओप कश्चितकोणः यस्य जीवा ज्ञाताऽस्ति कोणश्च इ इत्यनेन द्योत्यते। ओअ रेखोपरि पम लम्बः कार्यः तथा मओ, म' विन्दुपर्यन्तं वर्धनीया यत्र ओम' = मओ तथा म'प', मप इत्यस्य तुल्या समानान्तरा च रचनीया।

तदा अओप' कोणः = π – इ

यदा भ्रमन्ती ओप रेखा ओप, वा ओप' स्थितौ नह्यन्यस्थितौ भवेत् तदा रचितकोणयोर्ज्या निर्दिष्ट ज्या तुल्या यदा भ्रमन्ती रेखा ओप, स्थितौ तदैकं पूर्णभ्रमणं सम्पाद्य इ कोणमुत्पादितवती अर्थादेष कोणः

२ र π + इ. . . . .(१) पूर्वयुक्त्या

यत्र र मानं शून्यमथवा पूर्णसंख्यातुल्यं धनात्मकम् ऋणात्मकम् वा यदा भ्रमन्ती रेखा ओप' स्थितौ तदा पूर्वोक्त्यैव कोणमानं = २र π + अओप' अर्थात् २र π + π –इ कोणः = (२र + १) π –इ..........(२)

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

अत्रापि रमानं शून्यं यद्वा धनात्मकमधनात्मकं वा पूर्णसंख्यासमम् एतादृशाः सर्व एव कोणाः न π + $(-१)^{न}$.इ.........(३)

अस्मिन्नेव सार्वत्रिकस्वरूपे निष्पन्नाः। अत्रापि न शून्यमथवा धनात्मकमधनात्मकं वा पूर्णसंख्यातुल्यम्।

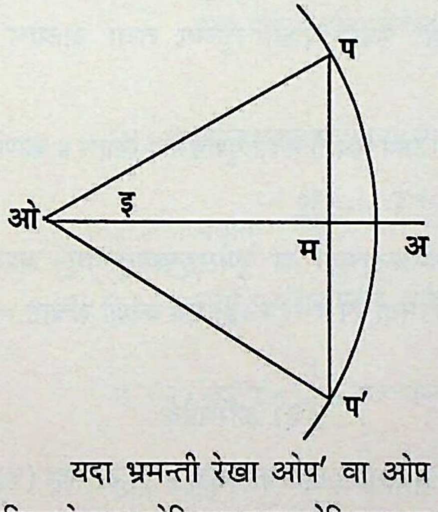
यतः यदा न = २र, तदा यतः $(-१)^{२र}$ = + १ तदा (३) अत्रोत्थापनेन २ र π + इ एतदेव जातं यच्च (१) अस्य स्वरूपस्य तुल्यम्।

एवं यदा न = २र + १, तदा $(-१)^{२र+१}$ = −१ तदा (३) स्वरूपे उत्थापनेन (२ र + १)π −इ इदमपि (२) इत्यस्य स्वरूपस्य तुल्यम्।

अतस्तृतीयस्वरूपं (३) सार्वत्रिकं विदितज्यातः कोणानयने बोध्यम् (अनु) येषां कोणानां जीवा एकैव तेषां कोणानां कोटिच्छेदनरेखापि तथाविधैव।

तेन (३) अस्मिनस्वरूपे सर्वकोणाः एककोटिच्छेदनरेखात्मकाः।

प्र० ३२ विदितकोटिज्यायाः साधारणरूपेण कोणमानानयनम्।



कल्प्यते अओप = इ कोणः यस्य कोटिज्या विदिताऽस्ति। ओअ रेखोपरि पम लम्बः कार्यः स च प' चिह्नपर्यन्तं वर्धनीयः यत्र मप' = पम

यदा भ्रमन्ती रेखा ओप' वा ओप स्थितौ नह्यन्यस्यां स्थितौ भवेत्तदा रचितकोणस्य कोटिज्या प्रदत्तकोटिज्यायास्तुल्या।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

यदा भ्रमन्ती त्रिज्या रेखा ओप स्थितौ तदेयं पूर्णभ्रमणं सम्पाद्य इ कोणं रचितवती तेन कोणमानम् = २न π + इ, यत्र न = ० वा धनात्मकमधनात्मकं वा पूर्णसङ्ख्यातुल्यम्।

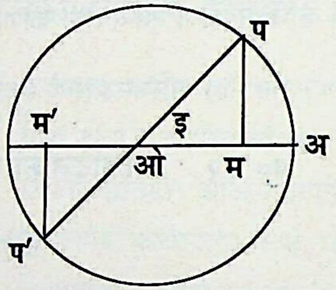
यदा भ्रमन्ती त्रिज्या रेखा ओपं स्थितौ तदेयं पूर्णभ्रमणं संपाद्य −इ कोणमुत्पादिवती अर्थात्तदा कोणमानम् = २न π −इ. . . . . . .(१)

यत्र न शून्यमथवा धनात्मकमधनात्मकं वा पूर्णसङ्ख्यातुल्यम्।

(अनु) (१) अस्मिन्स्वरूपे त एव कोणाः येषां छेदनरेखाऽपि तथाविधैव।

प्र० ३३ ज्ञातस्पर्शरेखायाः सार्वत्रिककोणानयनम्।

कल्प्यते अओप = इकोणः यस्य स्पर्शरेखा विदिताऽस्ति। पओ रेखा प′ चिह्नपर्यन्तं वर्धनीया तथा ओम′ रेखोपरि प′म′ लम्बः कार्यः।



अओप, अओप′ कोणयोः स्पर्श रेखा तुल्या तथा अओप′ कोणः = π + इ।

अथ यदा भ्रमन्ती त्रिज्या रेखा ओप स्थितौ तदेयं पूर्णभ्रमणं संपाद्य इ कोणं रचितवती अर्थात्तदैष कोणः = २र π + इ......(१)

यत्र र शून्यमथवा धनात्मकमधनात्मकं वा पूर्णसङ्ख्यातुल्यम्। यदा भ्रमन्ती त्रिज्या रेखा ओपं स्थितौ तदाऽनया २र π +(π+इ) एव कोणो रचितः = (२ र + १)π + इ. . . . .(२)

सर्व एते कोणाः न π + इ. . . . . . .(३) अस्मिन्नेव स्वरूपे निक्षिप्ताः। यतः यदा न समसङ्ख्या कल्प्यतां न = २र तदा (३) अत्रोत्थापनेन (१) इदमेव स्वरूपमायति।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

एवं यदा न विषमसङ्ख्या कल्प्यतां न = २र + १ तथापि (३) अत्रो त्थापनेन (२) स्वरूपमायाति।

(अनु) (३) अत्र स्वरूपे त एव कोणाः सन्ति येषां कोटि स्पर्शरेखाऽपि तथाविधैव यथा इ इत्यस्य।

निम्नप्रदत्तेषु फलेषु सर्वविधकोणानयनं क्रियताम् अत्र प्रथमं धनन्यूनतमकोणो ग्राह्यः येनालापः पूर्णो भवेत्।

उ.(१) (क) यत्र ज्या $= \frac{\sqrt{३}}{२}$ (ख) कोज्या $= -\frac{१}{२}$ (ग) स्परे $= \frac{१}{\sqrt{३}}$

(क) धनन्यूनतमकोणः यस्यज्या $= \frac{\sqrt{३}}{२}$, ६०° अर्थात् $\frac{\pi}{३}$

अतः पूर्वसाधितनियमेनेष्ट कोणः $= न\pi + (-१)^{न}\frac{\pi}{३}$

(ख) धनन्यूनतमकोणः यस्यकोज्या $= -\frac{१}{२}$, १२०° अर्थात् $\frac{२\pi}{३}$

अतः पूर्वसाधिनियमेनेष्ट कोणः $= २न\pi \pm \frac{२\pi}{३}$

(ग) धनन्यूनतमकोणः यस्य स्पर्श रेखा $= \frac{१}{\sqrt{३}}$, ३०°

अर्थात् $\frac{\pi}{६}$

अतः पूर्वसिद्धान्तेन सर्वविधकोणः $= न\pi + \frac{\pi}{६}$

उ. (२) ज्या^{२}इ$= \frac{१}{४}$ अत्र समीकरणे इ इत्यस्य साधारणमानं किम्?

अत्र ज्याइ $= \pm \frac{१}{२}$ धनचिह्नं गृहीत्वा

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$ज्याइ = \frac{१}{२} = ज्या \frac{\pi}{६} \therefore इ = न\pi + (-१)^{न} \cdot \frac{\pi}{६}$$

$$ऋणचिह्नग्रहणेन\ ज्याइ = -\frac{१}{२} = ज्या \left(-\frac{\pi}{६}\right)$$

$$\therefore इ = न\pi + (-१)^{न} \cdot \left(-\frac{\pi}{६}\right)$$

$$उत्तरद्वयं\ गृहीत्वा\ इ = न\pi \pm (-१)^{न} \cdot \frac{\pi}{६}$$

$$अथवा\ तदेव\ स्वरूपम्\ इ = न\pi \pm \frac{\pi}{६}$$

(१४) प्रश्नाः–

अत्र तानि मानानि देयानि यैरालापः पूर्णो भवेत्।

१. $ज्याइ = \frac{१}{२}$ २. $ज्याइ = \frac{\sqrt{३}}{२}$ ३. $ज्याइ = \frac{१}{\sqrt{२}}$

४. $कोज्याइ = -\frac{१}{२}$ ५. $कोज्याइ = \frac{\sqrt{३}}{२}$ ६. $कोज्याइ = -\frac{१}{\sqrt{२}}$

७. $स्पइ = \sqrt{३}$ ८. $स्पइ = -१$ ९. $कोस्पइ = १$

१०. $छेइ = २$ ११. $कोछेइ = \frac{२}{\sqrt{३}}$ १२. $ज्या^{२}इ = १$

१३. $कोज्या^{२}इ = \frac{१}{४}$ १४. $स्प^{२}इ = \frac{१}{३}$ १५. $४ज्या^{२}इ = ३$

१६. $कोस्प^{२}इ = कोछे^{२}इ$ १७. $छे^{२}इ = \frac{४}{३}$

१८. यत्र $कोज्याइ = -\frac{१}{\sqrt{२}}$ तथा $स्पइ = १$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

१९. यत्र कोस्पइ = $-\sqrt{३}$ तथा कोछेइ = $-$ २

२०. यदि कोज्या (अ–व) = $\frac{१}{२}$, तथा ज्या (अ+व) = $\frac{१}{२}$ तत्र

अ, ब अनयोः धनन्यूनतममानं सार्वत्रिककोणमानं च किम्?

२१. यदि स्प (अ–व)=१ तथा छे(अ+व)= $\frac{२}{\sqrt{३}}$ तत्र कोणमानं किम्?

२२. तादृशकोणं निर्मीयतां = यस्यज्या $\frac{\sqrt{३}}{२}$

❑

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

सप्तमाध्यायः।

प्र. ३४ इतः पूर्वं यस्य कस्यापि स्वतन्त्रकोणस्य ज्यादयः साधिताः इदानीं स्वतन्त्रकोणयोर्योगस्य वियोगस्य वा ज्यादयः साध्यन्ते।

छात्रैरिदं सर्वदा स्मर्त्तव्यं **यत्कोणयोर्योर्गस्यान्तरस्य वा ज्यादयः स्वतन्त्रयोस्तयोर्ज्यादीनां योगस्यान्तरस्य वा तुल्या न भवन्ति।**

यथा ज्या (अ+व) = ज्याअ + ज्याव कथमपि नहि भवति एवं

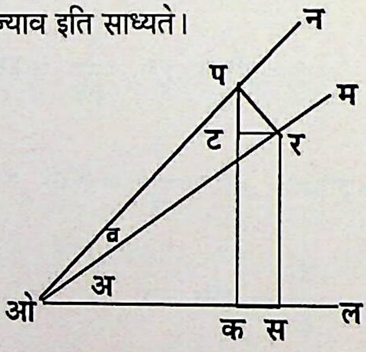
ज्या (अ-व) = ज्याअ–ज्याव कदापि नहि भवति।

यथा यदि अ = ६०°, व = ३०° तदा ज्या (अ+व)=ज्या (६०°+३०°)=

ज्या ९०° = १ परञ्च ज्या ६०° + ज्या ३०° = $\frac{\sqrt{३}}{२} + \frac{१}{२} = \frac{१+\sqrt{३}}{२}$ =१,

कदापि नहि भवति।

अथेदानीं ज्या (अ+व) = ज्याअ कोज्याव+ज्याव कोज्याअ तथा कोज्या (अ+व) = कोज्याअ कोज्याव–ज्याअ ज्याव इति साध्यते।



कल्प्यते ∠ लओम = अ तथा ∠ मओन = व तदा ∠ लओन = अ+व।

ओन रेखायां कमपि प विन्दुं गृहीत्वा ओल, ओम, रेखयोरूपरि पक, पर लम्बौ क्रमतो विधेयौ एवं र विन्दोः ओल, पक रेखयोरूपरि च क्रमतः रस, रट लम्बौ कार्यौ तदा परिभाषानुसारेण

$$ज्या\ (अ+व) = \frac{पक}{ओप} = \frac{कट+पट}{ओप} = \frac{रस+पट}{ओप} = \frac{रस}{ओप} + \frac{पट}{ओप}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$= \frac{\text{रस}}{\text{ओर}} \; \frac{\text{ओर}}{\text{ओप}} + \frac{\text{पट}}{\text{पर}} \; \frac{\text{पर}}{\text{ओप}}$$

= ज्याअ कोज्याव + कोज्या ∠ टपर ज्याव

परन्तु ∠ टपर = ९०° -टरप = ∠ टरओ = ∠ रओस = अ,

∴ ज्या (अ+व) = ज्याअ कोज्याव + कोज्याअ ज्याव

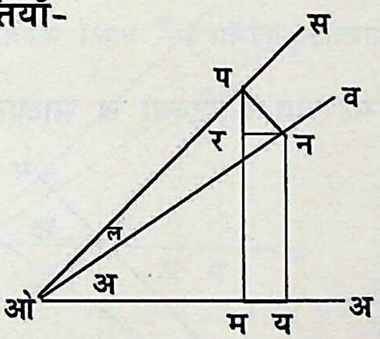
$$\text{एवमेव कोज्या(अ+व)} = \frac{\text{ओक}}{\text{ओप}} = \frac{\text{ओस–कस}}{\text{ओप}} = \frac{\text{ओस–टर}}{\text{ओप}} = \frac{\text{ओस}}{\text{ओप}} - \frac{\text{टर}}{\text{ओप}}$$

$$= \frac{\text{ओस}}{\text{ओर}} \; \frac{\text{ओर}}{\text{ओप}} - \frac{\text{टर}}{\text{पर}} \; \frac{\text{पर}}{\text{ओप}}$$

= कोज्याअ कोज्याव – ज्या ∠ टपर ज्याव

= कोज्याअ कोज्याव –ज्याअ ज्याव

शालिनी–दो कोणों के योग और अन्तर की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ-



∠ अ ओ व = अ

∠ व ओ स = व

∴ ∠ अ ओ स = अ+व

मानलिया कि भ्रमणशील रेखा ओअ घड़ी की सूई की विपरीत दिशा चलकर पहले ∠ अ ओ व=अ, और पुनः व ओ स = व बनाती है।

भ्रामक रेखा के अन्तिम स्थान में बिन्दु प लिया और ओ अ और ओ व रेखा पर क्रमशः प म और प न लम्ब किया। न से न र, अ ओ के समानान्तर रेखा खींचा जो म प को र बिन्दु पर मिलती है और न य, ओ अ, पर लम्ब किया।

∠ र प न = ९०° – ∠ प न र = ∠ र न ओ = ∠न ओ य = ∠अ।

$$\therefore \text{ ज्या (अ + ब) = ज्या } \angle \text{ अ ओ प} = \frac{\text{म प}}{\text{ओप}}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$= \frac{\text{म र+र प}}{\text{ओ प}} = \frac{\text{य न}}{\text{ओ प}} + \frac{\text{र प}}{\text{ओ प}}$$

$$= \frac{\text{य न}}{\text{ओ न}} \cdot \frac{\text{ओ न}}{\text{ओ प}} + \frac{\text{र प}}{\text{न प}} \cdot \frac{\text{न प}}{\text{ओ प}}$$

= ज्या अ. कोज्या ब + कोज्या र प न. ज्या ब.

∴ ज्यां (अ + ब) = ज्याअ. कोज्या ब + कोज्य अ. ज्या ब.

और कोज्या (अ + ब) = कोज्या अ ओप = $\frac{\text{ओम}}{\text{ओप}}$

$$= \frac{\text{ओ य–म य}}{\text{ओ प}} = \frac{\text{ओ य}}{\text{ओ प}} - \frac{\text{र न}}{\text{ओ प}}$$

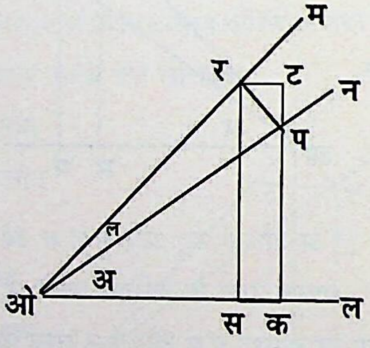
$$= \frac{\text{ओ य}}{\text{ओ न}} \cdot \frac{\text{ओ न}}{\text{ओ प}} - \frac{\text{र न}}{\text{न प}} \cdot \frac{\text{न प}}{\text{ओ प}}$$

= कोज्या अ. कोज्या ब – ज्या र प न. ज्या ब.

∴ कोज्या (अ+ब) = कोज्याअ. कोज्या ब – ज्याअ. ज्याब. इति।

अथेदानीं चापयोरन्तरस्य ज्या कोटिज्या च साध्यते।

तत्र ज्या (अ – ब) = ज्याअ कोज्याव –ज्याव कोज्याअ तथा कोज्या (अ – ब)=कोज्याअ कोज्याव + ज्याअ ज्याव कल्प्यते ∠ लओम = अ, तथा ∠ मओन= व, तदा ∠ लओन = अ – व, ओन रेखायां कमपि प विन्दुं



गृहीत्वा ओल, ओम रेखयोरूपरि क्रमतः पक, पर लम्बौ कार्यौ एवं ओल, कप रेखयोरूपरि क्रमतः रस तथा रट लम्बौ कार्यौ तदा परिभाषावलात् ज्या (अ–व)=

$$\frac{\text{पक}}{\text{ओप}} = \frac{\text{कट – पट}}{\text{ओप}} = \frac{\text{रस–पट}}{\text{ओप}} = \frac{\text{रस}}{\text{ओप}} - \frac{\text{पट}}{\text{ओप}}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$= \frac{रस}{ओर} \cdot \frac{ओर}{ओप} - \frac{पट}{पर} \cdot \frac{पर}{ओप}$ = ज्याअ कोज्याव–कोज्या ∠टपर ज्याव

परन्तु ∠टपर = ९०° – ∠टरप = ∠मरट = ∠मओल = अ,

∴ ज्या (अ–व) = ज्याअकोज्याव–कोज्याअज्याव,

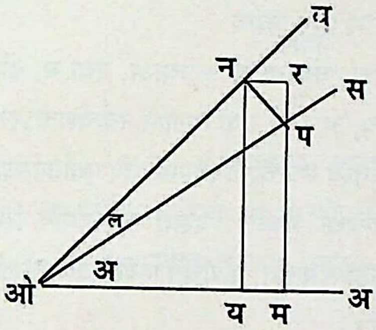
एवमेव कोज्या (अ–व) = $\frac{ओक}{ओप} = \frac{ओस+सक}{ओप} = \frac{ओस+रट}{ओप} = \frac{ओस}{ओप} + \frac{रट}{ओप}$

$= \frac{ओस}{ओर} \cdot \frac{ओर}{ओप} + \frac{रट}{रप} \cdot \frac{रप}{ओप}$ = कोज्याअ . कोज्याव+

ज्या ∠रपट . ज्याव = कोज्याअ . कोज्याव + ज्याअ ज्याव

शालिनी–ज्या (अ–ब) = ज्या अ. कोज्या ब – कोज्या अ. ज्या ब.

कोज्या (अ–ब) = कोज्याअ. कोज्याब + ज्याअ. ज्या ब.



मानलिया कि भ्रामक रेखा प्रारंभिक रेखा ओ अ से चलकर कोण अ ओ व = अ बनाती है, पुनः विपरीत दिशा की ओर मुड़कर कोण व ओ स = ब बनाती है। ∴ ∠अ ओ स=अ–ब

भ्रामक रेखा के अन्तिम स्थान में बिन्दु प लिया और ओ अ और ओ व्र पर क्रमशः प म और पन लम्ब किया। बिन्दु न से ओ अ और म प पर क्रमशः पम और पन लम्ब किया। बिन्दु न से ओ अ और मप पर क्रमशः न य और न र लम्ब किया।

∠र प न = ९०° – ∠प न र = ∠र न व = ∠य ओ न = अ

∴ ज्या (अ–ब) = ज्या अ ओ स = $\frac{मप}{ओप}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$= \frac{मर - पर}{ओप} = \frac{यन}{ओप} - \frac{पर}{ओप}$$

$$= \frac{यन}{ओन} \quad \frac{ओन}{ओप} - \frac{पर}{पन} \quad \frac{पन}{ओप}$$

= ज्याअ. कोज्या ब – कोज्या र प न. ज्या ब.

∴ ज्या (अ–ब) = ज्या अ. कोज्या ब – कोज्या अ. ज्या ब.

$$\text{और कोज्या (अ–ब)} = \frac{ओम}{ओप} = \frac{ओय+यम}{ओप}$$

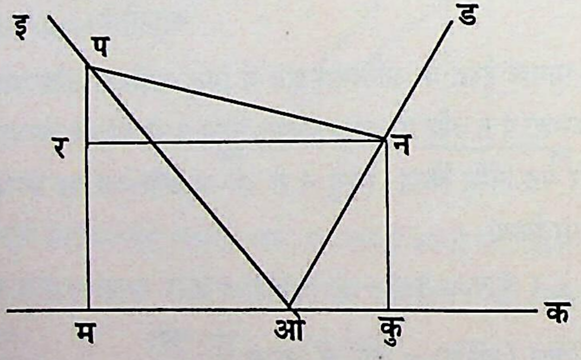
$$= \frac{ओय}{ओप} + \frac{नर}{ओप}$$

$$= \frac{ओय}{ओन} \cdot \frac{ओन}{ओप} + \frac{नर}{नय} \cdot \frac{नप}{ओप}$$

= कोज्या अ. कोज्याब + ज्या न पर. ज्याब.

∴ कोज्या (अ–ब) = कोज्याअ. कोज्या ब + ज्याअ. ज्या ब. इति।

अत्रेदं स्मर्त्तव्यं यत्पूर्वोपपत्तिः अ, व, अ + व, एषां मानानि नवत्यंशतोऽल्पानि स्वीकृत्य साधिता परञ्च अ, व कोणयोर्योगस्य नवत्यंशाधिकमानेऽपि पूर्वोक्तसिद्धान्त एव दृढ़ीभूतो भवति केवलं क्षेत्रसंस्थान्यथा भवति। यस्यां कस्यामपि स्थितौ केवलमियमेव भिन्नता यल्लम्बः कुत्रापि रेखायां पतति, कुत्रचित् स्थितौ वर्धितरेखोपरि पतति तादृश्यां स्थितावेतादृशी क्षेत्ररचना।



कल्प्यते कओडकोणः = अ तथा डओइ = व तदा ∠कओइ = अ+ व,

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

ओइ रेखायां कुत्रापि प विन्दुं गृहीत्वा तस्माद्विन्दोर्वर्धित कओ रेखोपरि पम लम्बः कार्यः तथा ओड रेखोपरि पन लम्ब कार्यः तथा पम रेखोपरि नर लम्बः एवं ओक रेखोपरि नकु लम्बश्च कार्यः।

तदा नपर कोणस्य कोटिः पनर कोणः स्यात्

अतः $\angle$ नपर = $\angle$ रनओ = $\angle$ नओक = अ

$$\text{इदानीं ज्या (अ+ब)} = \frac{\text{पम}}{\text{ओप}} = \frac{\text{मप+पर}}{\text{ओप}} = \frac{\text{नकु}}{\text{ओप}} + \frac{\text{पर}}{\text{ओप}}$$

$$= \frac{\text{नकु}}{\text{ओन}} \cdot \frac{\text{ओन}}{\text{ओप}} + \frac{\text{पर}}{\text{पन}} \cdot \frac{\text{पन}}{\text{ओप}}$$

= ज्याअ. कोज्याव + ज्याव कोज्याअ

$$\text{एवम् कोज्या (अ+ब)} = -\frac{\text{ओम}}{\text{ओप}} = -\frac{\text{मकु}-\text{ओकु}}{\text{ओप}} = \frac{\text{ओकु}-\text{नर}}{\text{ओप}} = \frac{\text{ओकु}}{\text{ओप}} - \frac{\text{नर}}{\text{ओप}}$$

$$= \frac{\text{ओकु}}{\text{ओन}} \cdot \frac{\text{ओन}}{\text{ओप}} - \frac{\text{नर}}{\text{पन}} \cdot \frac{\text{पन}}{\text{ओप}}$$

= कोज्याअ कोज्याव – ज्याअ ज्याव

अत्रेदमपि ज्ञेयं यत् ओ विन्दोः वामभागे ओम स्थितमतः ऋणं तेन

–ओम = ओकु–कुम = ओकु–नर अतः

प्र. ३५ कल्प्यते रूपव्यासार्धे अकोणस्य ज्या=ज्याअ = $\frac{\text{ज्याअ. त्रि} \times १}{१ \times \text{त्रि}}$ अत्र

$\frac{\text{ज्याअ} \times \text{त्रि}}{१}$ = ज्या अचाप अतः ज्याअ = $\frac{\text{ज्याअचाप}}{\text{त्रि}}$ अत इदं

स्पष्टं यच्चापज्या त्रिज्याभक्ता तच्चापकोणज्या भवति रूपव्यासार्धे एवमेव

रूपव्यासार्धे कोणद्वययोगान्तरज्या = ज्या (अ $\pm$ क) =

ज्याअ. कोज्याक $\pm$ ज्याक . कोज्याअ

अत्र कोणस्थाने चापस्य ग्रहणेन तन्मानोत्थापनेन च

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{ज्याचाप (अ}\pm\text{क)} = \frac{\text{ज्याअचा}}{\text{त्रि}} \times \frac{\text{कोज्याकचा}}{\text{त्रि}} \pm \frac{\text{ज्याकचा}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{कोज्याअचा}}{\text{त्रि}}$$

$$= \frac{\text{ज्याअचा कोज्याकचा} \pm \text{ज्याकचा . कोज्याअचा}}{\text{त्रि}^2}$$

ततोऽनुपातः यदि रूपव्यासार्धे इयं ज्या तदा त्रिज्या व्यासार्धे केति लब्धाभीष्ट त्रिज्याव्यासार्धे चापयोगान्तरस्यज्या = ज्याचा (अ $\pm$ क) =

$$\frac{\text{ज्याअचा . कोज्याकचा} \pm \text{ज्याकचा . कोज्याअचा}}{\text{त्रि}}$$

अनेनोपपन्नं भास्करीयं सूत्रम्–

चापयोरिष्टयोर्दोर्ज्ये मिथः कोटिज्यकाहते।

त्रिज्याभक्ते तयोरैक्यं स्याच्चापैक्यस्य दोर्ज्यका।।

चापान्तरस्य जीवा स्यात्तयोरन्तरसंमिता।

एवम् रूपव्यासार्धे कोज्या (अ$\pm$क) = कोज्याअ कोज्याक $\pm$ ज्याअ ज्याक अत्रापि पूर्ववदुत्थापनेन

$$\text{कोज्या चा (अ}\pm\text{क)} = \frac{\text{कोज्याअचा}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{कोज्या कचा}}{\text{त्रि}} \pm \frac{\text{ज्याअचा}}{\text{त्रि}} \cdot \frac{\text{ज्याकचा}}{\text{त्रि}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या अचा . कोज्या कचा} \pm \text{ज्या अचा . ज्या कचा}}{\text{त्रि}^2}$$

ततोऽनुपातः यदि रूपव्यासार्धे इयं कोटिज्या तदेष्ट त्रिज्याव्यासार्धे केति लब्धाऽभीष्ट त्रिज्याव्यासार्धे चापैक्यान्तरस्यकोटिज्या

$$= \frac{\text{कोज्याअचा. कोज्याकचा} \pm \text{ज्याअचा. ज्याकचा}}{\text{त्रि}}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

अनेनावतरतीदं कमलाकरपद्यम्—

दोर्ज्ययोः कोटिमौर्व्योश्च घातौ त्रिज्योद्धृतौ तयोः।
वियोगयोगौ जीवे स्तश्चापैक्यान्तरकोटिजे।।

अनुमानम् (१) कोणीययोगान्तरज्याकोटि ज्यातस्तथा चापीययोगान्तरज्याकोटि ज्यास्वरूपादेवेदंस्फुटं यत् कस्मिंश्चित् त्रैकोणमितिके राशौ समीकरणे वा कोणीज्यादिषु त्रिहरे दत्ते ताः कोणीयज्यादयश्चापीया भवन्ति।

(१५) अभ्यासार्थं प्रश्नाः निम्नस्थाः साध्याः।

१. $कोज्या\ (अ + ४५^\circ) = \frac{१}{\sqrt{२}}\ (कोज्या - ज्याअ)$

२. $२ज्या\ (३०^\circ - अ) = कोज्याअ - \sqrt{३}\ ज्याअ$

३. यदि $कोज्याअ = \frac{४}{५}$, $कोज्याव = \frac{३}{५}$ तदा

ज्या (अ+व) तथा कोज्या (अ–व) अनयोर्माने के?

४. $ज्या\ १५^\circ = कोज्या\ ७५^\circ = \frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}}$

५ $\frac{ज्या\ (अ+व)}{कोज्याअ \times कोज्याव} = स्पअ + स्पव$

६. $कोज्या\ (४५^\circ + अ) + ज्या\ (अ - ४५^\circ) = ०$

७. $कोज्या\ (अ+व) + ज्या\ (अ-व) =$

$(कोज्याअ + ज्याअ)\ (कोज्याव - ज्याव)$

८. $२\ ज्या\ (अ + ४५^\circ)\ ज्या\ (अ - ४५^\circ) = ज्या^{२}अ - कोज्या^{२}\ अ$

९. $२\ कोज्या\ (\frac{\pi}{४} + अ)\ कोज्या\ (\frac{\pi}{४} - अ)\ कोज्या^{२}अ - ज्या^{२}अ$

१०. $२ज्या(\frac{\pi}{४} + अ) कोज्या(\frac{\pi}{४} + व) = कोज्या(अ+व) + ज्या(अ-व)$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

११. $\dfrac{\text{ज्या (व–र)}}{\text{कोज्याव कोज्यार}} + \dfrac{\text{ज्या (र–अ)}}{\text{कोज्यार . कोज्याअ}} + \dfrac{\text{ज्या (अ–व)}}{\text{कोज्याअ कोज्याव}} = ०$

प्र. ३६ इदानीं कोणयोगस्यान्तरस्य च स्पर्शरेखा साध्यते।

$$\text{स्प (अ+व)} = \dfrac{\text{ज्या (अ+व)}}{\text{कोज्या(अ+व)}} = \dfrac{\text{ज्याअ कोज्याव + ज्याव कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ कोज्याव –ज्याअ ज्याव}}$$

$$= \dfrac{\dfrac{\text{ज्याअ कोज्याव}}{\text{कोज्याअ कोज्याव}} + \dfrac{\text{ज्याव कोज्याअ}}{\text{कोज्याअ कोज्याव}}}{१ - \dfrac{\text{ज्याअ ज्याव}}{\text{कोज्याअ कोज्याव}}} = \dfrac{\text{स्पअ+स्पव}}{\text{१–स्पअ स्पव}}$$

$$\text{एवम् स्प (अ–व)} = \dfrac{\text{ज्या (अ–व)}}{\text{कोज्या (अ–व)}} = \dfrac{\text{ज्याअ कोज्याव–कोज्याअ ज्याव}}{\text{कोज्याअ कोज्याव+ज्याअ ज्याव}}$$

$$= \dfrac{\dfrac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्या अ}} - \dfrac{\text{ज्याव}}{\text{कोज्याव}}}{१ + \dfrac{\text{ज्याअ ज्याव}}{\text{कोज्याअ कोज्याव}}} = \dfrac{\text{स्पअ–स्पव}}{\text{१+स्पअ स्पव}}$$

उ. १. ७५° स्पर्शरेखा साध्या—

$$\text{स्प } ७५° = \text{स्प } (४५° + ३०°) = \dfrac{\text{स्प } ४५° + \text{स्प } ३०°}{१ - \text{स्प } ४५° \text{ स्प } ३०°}$$

$$= \dfrac{१ + \dfrac{१}{\sqrt{३}}}{१ - \dfrac{१}{\sqrt{३}}} = \dfrac{\sqrt{३}+१}{\sqrt{३}-१}$$

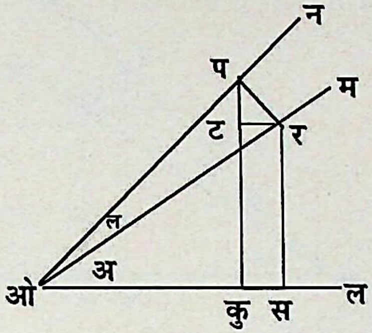
RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\frac{(\sqrt{३}+१)(\sqrt{३}+१)}{३-१} = \frac{४+२\sqrt{३}}{२} = २+\sqrt{३}$$

योगकोणस्य स्पर्शरेखाज्ञानाय क्षेत्रगतोपपत्तिः।

कल्प्यतां ∠ लओम = अ, तथा ∠ मओन = व, तदा∠लओन = अ + व। ओन रेखायां क्वापि प विन्दुं मत्वा पकु, पर लम्बौ क्रमशः ओल, ओम रेखोपरि निपातनीयौ। रस रट लम्बौ च क्रमशः ओल, पकु रेखोपरि निपात्यौ।



$$\text{तदा स्प (अ+ब)} = \frac{\text{पकु}}{\text{ओकु}} = \frac{\text{रस+पट}}{\text{ओस}-\text{टर}} = \frac{\frac{\text{रस}}{\text{ओस}}+\frac{\text{पट}}{\text{ओस}}}{१-\frac{\text{टर}}{\text{ओस}}}$$

$$= \frac{\frac{\text{रस}}{\text{ओस}}+\frac{\text{पट}}{\text{ओस}}}{१-\frac{\text{टर}}{\text{टप}}\cdot\frac{\text{टप}}{\text{ओस}}}$$

$$\text{इदानीं } \frac{\text{रस}}{\text{ओस}} = \text{स्पअ, तथा } \frac{\text{टर}}{\text{टप}} = \text{स्पब,}$$

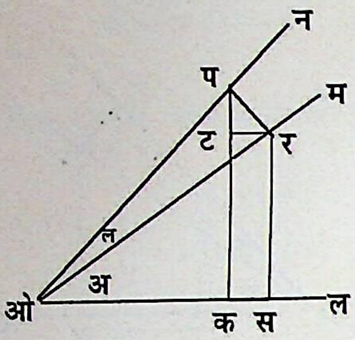
$$\text{तथा रओस,टपर त्रिभुजे सजातीये अतः } \frac{\text{पट}}{\text{ओस}} = \frac{\text{पर}}{\text{ओर}} = \text{स्पव}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\therefore \text{स्प}\ (\text{अ}+\text{ब}) = \frac{\text{स्पअ} + \text{स्पव}}{१ - \text{स्पअ}\ .\ \text{स्पव}}$$

शालिनी–क्षेत्र द्वारा स्प (अ + ब) का मान ज्ञात करना–



कल्पना किया कि ओल एक भ्रामक रेखा, जो घड़ी की सूई की विपरीत दिशा चलकर ∠ल ओ म = अ बनाती है, पुनः आगे चलकर ∠म ओ न = ब बनाती है अर्थात् ∠ल ओ म = अ एवं ∠म ओ न = ब। ∴ ∠ल ओ न = अ + ब। ओ न रेखा पर प बिन्दु लिया और क्रमशः पक और पर लम्ब, क्रमशः ओल, ओम रेखा पर किया। रस, रट लम्ब क्रमशः ओल, पक पर लिया।

$$\therefore \text{स्प}\ (\text{अ} + \text{ब}) = \frac{\text{पक}}{\text{ओक}} = \frac{\text{रस} + \text{पट}}{\text{ओस} - \text{टर}}$$

$$= \frac{\frac{\text{रस}}{\text{ओस}} + \frac{\text{पट}}{\text{ओस}}}{१ - \frac{\text{टर}}{\text{ओस}}} = \frac{\frac{\text{रस}}{\text{ओस}} + \frac{\text{पट}}{\text{ओस}}}{१ - \frac{\text{टर}}{\text{टप}} . \frac{\text{टप}}{\text{ओस}}}$$

$$\because \frac{\text{रस}}{\text{ओस}} = \text{स्पअ, एवं } \frac{\text{टर}}{\text{टप}} = \text{स्प व}$$

∴ Δ र ओ स और Δ ट प र सजातीय है

$$\therefore \frac{\text{पट}}{\text{ओस}} = \frac{\text{पर}}{\text{ओस}} = \text{स्प ब}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\therefore \text{स्प } (\text{अ} + \text{ब}) = \frac{\text{स्प अ} + \text{स्प ब}}{१ - \text{स्पअ. स्प ब}}$$

उपपन्नम्।

एवमन्तरकोणं विधायान्तरचापस्यापि स्पर्शरेखा क्षेत्रयुक्त्या साधिता भवति।

प्र. ३७ अथ कोणयोगान्तरस्य च कोटि स्पर्श रेखाऽऽनयनं क्रियते-

$$\text{कोस्प } (\text{अ} + \text{व}) = \frac{\text{कोज्या } (\text{अ} + \text{व})}{\text{ज्या } (\text{अ} + \text{व})} =$$

$$\frac{\text{कोज्याअ कोज्याव} - \text{ज्याअ ज्याव}}{\text{ज्याअ कोज्याव} + \text{कोज्याअ ज्याव}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{कोज्याअ कोज्याव}}{\text{ज्याअ ज्याव}} - १}{\dfrac{\text{ज्याअ कोज्याव}}{\text{ज्याअ ज्याव}} + \dfrac{\text{कोज्याअ ज्याव}}{\text{ज्याअ ज्याव}}} = \frac{\text{कोस्पअ कोस्पव} - १}{\text{कोस्पव} + \text{कोस्पअ}}$$

$$\text{अनयैव दिशा कोस्प } (\text{अ} - \text{व}) = \frac{\text{कोस्पअ कोस्पव} + १}{\text{कोस्पव} - \text{कोस्पअ}} \text{ सिद्धयति।}$$

प्र० ३८–अथेदानीं कोणत्रयाणां योगज्या साध्यते–तद्यथा

ज्या (अ + व + क) = ज्या { (अ + व) + क } =

ज्या (अ+व) कोज्याक + ज्याककोज्या (अ + व) =

(ज्याअ कोज्याव + ज्याव कोज्याअ) कोज्याक

+ (कोज्याअ कोज्याव – ज्याअ ज्याव) ज्याक

= ज्याअ कोज्याव कोज्याक + ज्याव कोज्याअ कोज्याक

+ कोज्याअ कोज्याव ज्याक–ज्याअ ज्याव ज्याक।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

इदानीं कोणत्रयाणां योगस्पर्शरेखा साध्यते।

$$\text{स्प}\,(\text{अ} + \text{व} + \text{क}) = \text{स्प}\,\{(\text{अ} + \text{व}) + \text{क}\} =$$

$$\frac{\text{स्प}\,(\text{अ} + \text{व}) + \text{स्पक}}{१ - \text{स्प}\,(\text{अ}+\text{व})\,\text{स्पक}} = \frac{\dfrac{\text{स्पअ} + \text{स्पव}}{१ - \text{स्पअ स्पव}} + \text{स्पक}}{१ - \dfrac{\text{स्पअ}+\text{स्पव}}{१ - \text{स्पअ स्पव}} \times \text{स्पक}}$$

$$= \frac{\text{स्पअ}+\text{स्पव}+\text{स्पक} - \text{स्पअ स्पव स्पक}}{१ - \text{स्पअ स्पव} - \text{स्पक स्पअ} - \text{स्पव स्पक}}$$

अथ यदि अ + व + क = १८०°, तदा स्प (अ + व + क)

= स्प १८०° = ०

$$\text{तेन, } ० = \frac{\text{स्पअ}+\text{स्पव}+\text{स्पक} - \text{स्पअ स्पव स्पक}}{१ - \text{स्पअ स्पव} - \text{स्पक स्पअ} - \text{स्पव स्पक}} \text{ छेदगमेन}$$

० = स्पअ+स्पव+स्पक−स्पअ स्पव स्पक पक्षान्तरानयनेन

∴ स्पअ+स्पव+स्पक = स्पअ स्पव स्पक

उ. १. कोस्प२अ+स्पअ = कोछे२अ, इति साध्यताम्–

$$\text{प्रथमः पक्षः} = \frac{\text{कोज्या २ अ}}{\text{ज्या २ अ}} + \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्याअ २ अ कोज्या अ} + \text{ज्या २ अ ज्या अ}}{\text{ज्या २ अ कोज्या अ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या (२ अ−अ)}}{\text{ज्या २ अ कोज्या अ}} = \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या २ अ कोज्या अ}}$$

$$= \frac{१}{\text{ज्या २ अ}} = \text{कोछे २ अ}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

उ. २. कोज्या ४ अ कोज्या अ+ज्या ४ अ ज्या अ

= कोज्या २ अ कोज्या अ–ज्या २ अ ज्या अ, इति साध्यताम्

प्रथमः पक्षः = कोज्या (४ अ–अ) = कोज्या ३ अ

+ कोज्या (२ अ+अ) = कोज्या २ अ कोज्या अ–ज्या २अ ज्या अ

(१६) अभ्यासार्थं प्रश्नाः।

१. कोज्या (अ+व) कोज्याव+ज्या (अ+व) ज्याव=कोज्या अ

२. कोज्या २अ कोज्याअ+ज्या २ अ ज्या अ = कोज्याअ

३. ज्या (६०°–अ) कोज्या (३० + अ)

+ कोज्या (६०°–अ) ज्या (३०° + अ) = १

४. $\frac{\text{कोज्या२अ}}{\text{छे अ}} - \frac{\text{ज्या २ अ}}{\text{कोछे अ}} = \text{कोज्या ३ अ}$

५. $\frac{\text{कोस्प (अ+व) कोस्पअ+१}}{\text{कोस्प अ–कोस्प (अ+व)}} = \text{कोस्पव}$

६. $\frac{\text{स्प ४ अ–स्प ३ अ}}{\text{१+स्प ४अ स्प ३ अ}} = \text{स्पअ}$

७. १+स्प २इ स्पइ = छे २इ

८. ज्या२इ कोज्या इ+कोज्या२इज्याइ=ज्या४इकोज्याइ–
कोज्या४ इ ज्याइ

९. कोज्या ४ अ कोज्या अ–ज्या ४ अ ज्या अ
= कोज्या ३ अ कोज्या २अ–ज्या ३ अ ज्या २ अ

(प्र० ३९)

इदानीं द्विगुणितांशानां ज्याकोटिज्यादिकं साध्यते।

ज्या २अ=ज्या (अ+अ) = ज्याअ कोज्या अ+कोज्या अ ज्या अ
= २ ज्या अ कोज्या अ।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

अतो यदी २अ = इ, तदा ज्याइ = २ ज्या $\frac{इ}{२}$.कोज्या $\frac{इ}{२}$

अमुनैव प्रकारेण ज्या४अ = २ज्या २अ कोज्या २अ

=४ ज्या अ कोज्या अ कोज्या २अ। तथा कोज्या २ अ=कोज्या(अ+अ)

=कोज्याअ कोज्याअ–ज्याअज्याअ=कोज्या^{२}अ–ज्या^{२}अ.......(१)

वा, कोज्या२अ=कोज्या^{२}अ–(१–कोज्या^{२}अ)=२कोज्या^{२}अ–१.....(२)

वा, कोज्या २अ = (१–ज्या^{२}अ)–ज्या^{२}अ = १–२ ज्या^{२}अ....(३)

एवमत्र द्विगुणितांशानां कोटिज्यामानं त्रिधा भवति।

(२), (३) आभ्यां १ + कोज्या २ अ = २ कोज्या^{२}अ....(४)

१–कोज्या२अ = २ ज्या^{२}अ. . . . .(५)

(४), (५) परस्परभजनेन $\frac{१–कोज्या\ २अ}{१+कोज्या\ २\ अ}$ = स्प^{२}अ (६)

उ १, कोज्या (४अ), ज्याअ स्वरूपे परिणीयताम्

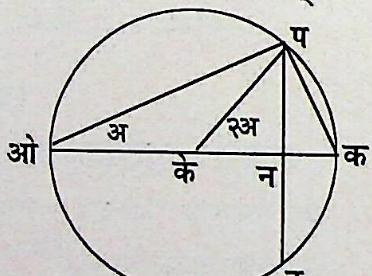
कोज्या४अ = १–२ ज्या^{२}२अ

= १–२ (४ज्या^{२}अ कोज्या^{२} अ) = १–८ ज्या^{२}अ (१–ज्या^{२}अ)

= १–८ ज्या^{२}अ + ८ ज्या^{४}अ।

एतेसिद्धान्ताः प्रश्नोत्तरकरणे परमोपयोगिनः अत एव एतेऽभ्यसनीयाः।

द्विगुणितांशानां ज्याकोटिज्यादिसाधनार्थं क्षेत्रम्।



कल्प्यतां ककेप = ∠ २अ के केंद्रं मत्वा केप व्यासार्धेन वृत्तं विरचय्य ककेरेखा ओ पालिबिन्दु-पर्यन्तं वर्धनीया। ओप, पक रेखा च कार्या तथा केक रेखोपरि पबिन्दोः

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

पन लम्बश्च कार्यः। स चट परिधि बिन्दुपर्यन्तं वर्धनीयः।

रेः ३।२० क्षेत्रयुक्त्या $\angle$ कओप $= \frac{१}{२} \angle$ ककेप $=$ अ

तथा $\angle$ नपक $= \angle$ कओप $=$ अ, यतः कप, कट चापे तुल्ये पन लम्बस्य ज्याभावात् तथा पन, टन ज्ययोस्तुल्यत्वात्।

$$\text{अतः ज्या२अ} = \frac{\text{नप}}{\text{केप}} = \frac{\text{२नप}}{\text{२केक}} = \frac{\text{२नप}}{\text{२केओ}} = २\frac{\text{नप}}{\text{ओप}} \cdot \frac{\text{ओप}}{\text{कओ}}$$

$= २$ज्या $\angle$ नओप कोज्या $\angle$ पओक $=$ २ज्याअ.कोज्याअ।

यतः $\angle$ ओपक समकोणः वृत्तार्धान्तर्गतत्वात्।

$$\text{एवं कोज्या२अ} = \frac{\text{केन}}{\text{केप}} = \frac{\text{२केन}}{\text{२केक}} = \frac{\text{२केन}}{\text{ओक}} = \frac{(\text{ओके}+\text{केन})-(\text{ओके}-\text{केन})}{\text{ओक}}$$

$$= \frac{\text{ओन}-\text{नक}}{\text{ओक}} = \frac{\text{ओन.ओप}}{\text{ओप.ओक}} - \frac{\text{नक.पक}}{\text{पक.ओक}} = \text{कोज्या}^2\text{अ}-\text{ज्या}^2\text{अ},$$

$$\text{एवम् स्प २ अ} = \frac{\text{नप}}{\text{केन}} = \frac{\text{२नप}}{\text{२केन}} = \frac{\text{२नप}}{\text{ओन-नक}} = \frac{२\,\frac{\text{नप}}{\text{ओन}}}{१-\frac{\text{नक.पन}}{\text{पन.ओन}}} = \frac{\text{२स्पअ}}{१-\text{स्प}^2\text{अ}}$$

प्र० ४०. पूर्वसिद्धान्तानुसारेण—

$$२\,\text{ज्या}^2\,\frac{\text{इ}}{२} = १ - \text{कोज्याअ} = \text{उज्याअ}$$

$\therefore$ रूपव्यासे यदीयं तदा त्रिज्याव्यासे केति लब्धा चापात्मिका

$$२\,\text{ज्या}^2\,\frac{\text{अ}}{२} = \text{त्रि.उज्याअ}।$$

$$\therefore \text{ज्या}\frac{\text{अ}}{२} = \sqrt{\frac{\text{त्रि.उज्याअ}}{२}}\text{ , इत्युपपन्नम्}$$

"त्रिज्योत्क्रमज्यानिहतेर्दलस्य मूलं तदर्धांशकशिञ्जिनी वा"

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{एवम् २ज्या}^{२}\ \frac{\text{अ}}{२} = १-\text{कोज्याअ} = \frac{२-२\ \text{कोज्याअ}}{२}$$

$$= \frac{१+\text{ज्या}^{२}\text{अ}+\text{कोज्या}^{२}\text{अ}-२\ \text{कोज्याअ}}{२}$$

$$= \frac{\text{ज्या}^{२}\text{अ}+(१-\text{कोज्याअ})^{२}}{२} = \frac{\text{ज्या}^{२}\text{अ}+\text{उज्या}^{२}\text{अ}}{२}$$

$$\therefore \text{ज्या}\ \frac{\text{अ}}{२} = \sqrt{\frac{\text{ज्या}^{२}\text{अ}+\text{उज्या}^{२}\text{अ}}{२\times२}} = \frac{\sqrt{\text{ज्या}^{२}\text{अ}+\text{उज्या}^{२}\text{अ}}}{२}$$

अत उपपन्नं "क्रमोत्क्रमज्याकृतियोगमूलाद्दलं तदर्धांशकशिञ्जिनी वा" इति भास्करीयपद्यम्।

प्र० ४१. पूर्वोक्तसिद्धान्तानाश्रित्य इमेऽपि सिद्धान्ताः स्मरणीयाः।

$$\text{कोज्याअ} = \text{कोज्या}^{२}\ \frac{\text{अ}}{२} - \text{ज्या}^{२}\ \frac{\text{अ}}{२}$$

$$\text{कोज्याअ} = २\text{कोज्या}^{२}\ \frac{\text{अ}}{२} - १,\ \text{कोज्याअ} = १ - २\text{ज्या}^{२}\ \frac{\text{अ}}{२}$$

$$१ + \text{कोज्याअ} = २\ \text{कोज्या}^{२}\ \frac{\text{अ}}{२},\ १-\text{कोज्याअ} = २\ \text{ज्या}^{२}\ \frac{\text{अ}}{२}$$

प्र० ४२ अथेदानीं स्प२अ, इत्यादि स्पअ स्वरूपे परिणाम्यते-

$$\text{स्प २अ=स्प (अ+अ)} = \frac{\text{स्पअ+स्पअ}}{१-\text{स्पअ.स्पअ}} = \frac{२\text{स्पअ}}{१-\text{स्प}^{२}\text{अ}}$$

$$\text{एवम् ज्या२अ} = २\text{ज्याअ} . \text{कोज्याअ} = २\ \frac{\text{ज्याअ}}{\text{कोज्याअ}} . \text{कोज्या}^{२}\text{अ}$$

$$= २\ \text{स्पअ} . \text{कोज्या}^{२}\text{अ} = \frac{२\text{स्पअ}}{\text{छे}^{२}\text{अ}} = \frac{२\text{स्पअ}}{१+\text{स्प}^{२}\text{अ}}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

एवम् कोज्या२अ = कोज्या^{२}अ − ज्या^{२}अ = कोज्या^{२}अ (१−स्प^{२}अ)

$$\frac{१-स्प^{२}अ}{छे^{२}अ} + \frac{१-स्प^{२}अ}{१+स्प^{२}अ}$$

उ. १. $\frac{१-स्प^{२}(४५^\circ-अ)}{१+स्प^{२}(४५^\circ-अ)}$ = ज्या २ अ इति प्रदर्शय

प्रथमः पक्षः = कोज्या^{२} (४५°−अ) { १−स्प^{२} (४५°−अ) }

= कोज्या^{२} (४५°−अ) −ज्या^{२} (४५°−अ) = कोज्या२ (४५°−अ)

= कोज्या (९०°−२अ) = ज्या२अ

(१७) प्रश्नाः साध्यन्ताम्–

१. $\left(ज्या\,\frac{अ}{२} + कोज्या\,\frac{अ}{२}\right)^{२} = १ + ज्याअ$

२. $\frac{कोज्या\;२\;अ}{१+ज्या\;२\;अ} = स्प\,(४५^\circ-अ)$

३. ज्या ८अ = ८ज्याअ कोज्याअ कोज्या२अ कोज्या४अ

४. कोज्या४अ = ८कोज्या^{४}अ−८कोज्या^{२}अ + १

५. $ज्याअ = १-२ज्या^{२}\left(४५^\circ-\frac{अ}{२}\right)$

६. $कोज्या^{२}\left(\frac{\pi}{४}-अ\right)ज्या^{२}\left(\frac{\pi}{४}-अ\right) = ज्या२अ$

७. स्प (४५° + अ) −स्प (४५°−अ) = २स्प २अ

८. ज्या (४५°+ अ) कोज्या (४५°−व)

+ कोज्या (४५°+अ) ज्या (४५°−व) = कोज्या (अ−व)

९. $\frac{ज्या\,(अ-व)}{कोज्याअ\;कोज्याव} + \frac{ज्या\,(व-क)}{कोज्याव\;कोज्याक} + \frac{ज्या\,(क-अ)}{कोज्याककोज्याअ} = २$

१०. ज्या १०५° + कोज्या १०५° = कोज्या ४५°

११. कोज्याअ कोज्या (प−अ) −ज्याअ ज्या (प−अ) = कोज्याप

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

१२. कोज्या (अ + व) कोज्याप–कोज्या (व + प) कोज्याअ

= ज्याव ज्या (प–व)

१३. ज्या (न + १) अ ज्या (न–१)अ

+कोज्या (न+१) अ कोज्या (न–१) अ = कोज्या२अ

१४. ज्या (न + १) अ ज्या (न + २) अ

+ कोज्या (न + १) अ कोज्या (न + २) अ = कोज्याअ

प्र० ४३. इदानीं त्रिगुणितांशानां ज्याकोटिज्यादी-नामानयनं क्रियते-

ज्या३अ = ज्या(अ+२अ) ज्याअ . कोज्या२अ+कोज्याअ . ज्या२अ

= ज्याअ कोज्या^{२}अ+कोज्याअ . २ कोज्याअ . ज्याअ

= ज्याअ (१–२ज्या^{२}अ) +२ज्याअ(१–ज्या^{२}अ)

= ज्याअ – २ज्या^{३}अ + २ज्याअ – २ज्या^{३}अ

= ३ज्याअ – ४ज्या^{३}अ..................(१)

एवम् कोज्या३अ = कोज्या (अ+२अ) = कोज्याअ . कोज्या२अ

– ज्याअ . ज्या२अ = कोज्याअ (२कोज्या^{२}अ–१)

– ज्याअ.२ज्याअ. कोज्याअ= कोज्याअ (२कोज्या^{२}अ–१)

– २कोज्याअ (१–कोज्या^{२}अ).....

अतः कोज्या३अ = ४कोज्या^{३}अ–३कोज्याअ.......(२)

$$\text{एवम् स्प३अ} = \text{स्प (अ + २अ)} = \frac{\text{स्पअ + स्प२अ}}{\text{१–स्पअ.स्प२अ}}$$

$$= \frac{\text{स्पअ} + \dfrac{\text{२स्पअ}}{\text{१–स्प}^{२}\text{अ}}}{\text{१–स्पअ} . \dfrac{\text{२स्पअ}}{\text{१–स्प}^{२}\text{अ}}} = \frac{\text{स्पअ (१–स्प}^{२}\text{अ)+२स्पअ}}{\text{(१–स्प}^{२}\text{अ)–२स्प}^{२}\text{अ}}$$

$$= \frac{\text{३स्पअ–स्प}^{३}\text{अ}}{\text{१–३स्प}^{३}\text{अ}} \text{..................(३)}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(१८) अभ्यासार्थं प्रश्नाः साध्यन्ताम्–

१. $\frac{\text{ज्या (अ+३व) + ज्या (३अ+व)}}{\text{ज्या २अ+ज्या २ व}} = \text{२ कोज्या (अ+व)}$

२. ज्या ३अ+ज्या२अ–ज्याअ = ४ज्याअ कोज्या $\frac{\text{अ}}{\text{२}}$ कोज्या $\frac{\text{३अ}}{\text{२}}$

३. स्प २अ = (छे २अ+१) $\sqrt{\text{छे}^{\text{२}}\text{अ}-\text{१}}$

४. कोज्या$^{\text{३}}$ २इ+३ कोज्या २इ=४ (कोज्या$^{\text{६}}$इ–ज्या$^{\text{६}}$इ)

५. १+कोज्या$^{\text{२}}$२इ=२ (कोज्या$^{\text{४}}$ इ+ज्या$^{\text{४}}$इ)

६. $\frac{\text{ज्या२अ}}{\text{१+कोज्या२अ}} \cdot \frac{\text{कोज्याअ}}{\text{१+कोज्याअ}} = \text{स्प } \frac{\text{अ}}{\text{२}}$

७. ४ज्या$^{\text{३}}$अकोज्या३अ+४कोज्या$^{\text{३}}$अज्या३अ=३ज्या४अ

८. कोज्या$^{\text{३}}$अकोज्या३अ+ज्या$^{\text{३}}$अज्या३अ=कोज्या$^{\text{३}}$२अ

९. ४(कोज्या$^{\text{३}}$२०°+कोज्या$^{\text{३}}$४०°) =३(कोज्या२०°+कोज्या४०°)

१०. $\frac{\text{१}}{\text{स्प३इ+स्पइ}} - \frac{\text{१}}{\text{कोस्प३इ+कोस्पइ}} = \text{कोस्प४इ}$

प्र० ४४. अथ १५° पञ्चदशांशानां ज्याकोटिज्यानयनम्

कल्प्यते ∠ २अ = ३०° तदा ∠ अ = १५°

कल्प्यते केप व्यासार्धं = २र तदा कोज्या ३०° = $\frac{\text{केन}}{\text{केप}} = \frac{\text{केन}}{\text{२र}}$

द्रष्टव्यं द्विगुणितांशानां ज्याकोटिज्यादि साधनार्थं क्षेत्रम्

∴ केन = २र कोज्या ३०° = र $\sqrt{\text{३}}$

एवम् ज्या ३०° = $\frac{\text{नप}}{\text{केप}} = \frac{\text{नप}}{\text{२र}}$ ∴ नप=२रज्या ३०° = र

अतः ओन = ओके+केन = २ र+र $\sqrt{\text{३}}$ = र (२ + $\sqrt{\text{३}}$)

एवम् नके=केक–केन=२र–र $\sqrt{\text{३}}$=र (२–$\sqrt{\text{३}}$)

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$\therefore$ ओप^{२}=ओन ओक=र (२+ $\sqrt{३}$) ४ र, (रे.६।८क्षे.)

$\therefore$ ओप = र $\sqrt{२}$ ($\sqrt{३}$ + १)

एवम् पक^{२}=कन . कओ = र (२– $\sqrt{३}$) ४ र,

$\therefore$ पक = र $\sqrt{२}$ ($\sqrt{३}$–१)

$$\text{यतः ज्या } १५^\circ = \frac{\text{पक}}{\text{ओक}} = \frac{\sqrt{२}\,(\sqrt{३}-१)}{४} = \frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}}$$

$$\text{तथा कोज्या } १५^\circ = \frac{\text{ओप}}{\text{ओक}} = \frac{\sqrt{२}\,(\sqrt{३}+१)}{४} = \frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}$$

प्र० ४५. अथ नवांशानां ज्याकोटिज्यकादिकं साध्यते–

यतः ज्या ९° धनात्मिका $\therefore$ २ज्या९°

$$= \sqrt{१+\text{ज्या } १८^\circ} + \sqrt{१-\text{ज्या } १८^\circ}$$

$$= \sqrt{१+\frac{\sqrt{५}-१}{४}} + \sqrt{१-\frac{\sqrt{५}-१}{४}} = \frac{\sqrt{३+\sqrt{५}}}{२}$$

$$+ \sqrt{\frac{५-\sqrt{५}}{२}} \quad \therefore \text{ज्या } ९^\circ = \frac{\sqrt{३+\sqrt{५}} + \sqrt{५-\sqrt{५}}}{४}$$

$$\text{एवम् } २\text{कोज्या } ९^\circ = \sqrt{१+\text{ज्या } १८^\circ} - \sqrt{१-\text{ज्या } १८^\circ}$$

$$= \sqrt{१+\frac{\sqrt{५}-१}{४}} - \sqrt{१-\frac{\sqrt{५}-१}{४}} = \frac{\sqrt{३+\sqrt{५}}}{२}$$

$$- \frac{\sqrt{५-\sqrt{५}}}{२} \quad \therefore \text{कोज्या } ९^\circ = \frac{\sqrt{३+\sqrt{५}} - \sqrt{५-\sqrt{५}}}{४}$$

प्र० ४६. अथ ३६° ज्या साध्यते–

यतः कोज्या२अ = १–२ज्या^{२}अ

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\therefore \text{कोज्या } ३६^\circ = १ - २\text{ज्या}^२\, १८^\circ = १ - २\left(\frac{६-२\sqrt{५}}{१६}\right)$$

$$= १ - \frac{३-\sqrt{५}}{४} = \frac{\sqrt{५}+१}{४}$$

$$\therefore \text{ज्या } ३६^\circ = \sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\, ३६^\circ} = \sqrt{१ - \frac{६+२\sqrt{५}}{१६}}$$

$$= \frac{\sqrt{१०-२\sqrt{५}}}{४} = \frac{\sqrt{५-\sqrt{५}}}{२\sqrt{२}} = \frac{\sqrt{५-\sqrt{५}}}{\sqrt{८}}$$

अत्रापि रूपव्यासार्धे इयं तदा त्रिज्याव्यासार्धे केत्यनुपातेन

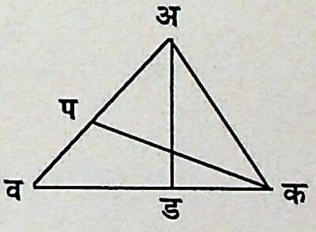
$$\text{लब्धा चापीया षट्त्रिंशदंशज्या} = \text{त्रि}\sqrt{\frac{५-\sqrt{५}}{८}} =$$

$$\sqrt{\frac{५\text{त्रि}^२ - \sqrt{५\text{त्रि}^४}}{८}}$$ वर्गेण वर्गं गुणयेद्भवेच्चेत्यादिना।

अत उपपन्नं **भास्करपद्यम्**—

त्रिज्याकृतीषुघातात् त्रिज्याकृतिवर्गपञ्चघातस्य।
मूलोनादष्टहृतान्मूलं षट्त्रिंशदंशज्या।।

प्र.४७. अथ क्षेत्र युक्तायाष्टादशांशज्या साध्यते रे४−१० क्षेत्रं निर्माय येन व,क कोणौ प्रत्येकं अ कोणात् द्विगुणौ भवतः तदा१८०°= अ+व+क=अ+२अ+२अ=५अ येन अ=३६° अतो यदि वक रेखोपरि अड लम्बस्तदा ∠वअड १८°।



क्षेत्रस्यास्येतिकर्त्तव्यतया वक = अप यत्र अबरेखायां प तादृशो विन्दुर्येन अव . वप = अप²। कल्पयतां अव = र, अप = य तदा र (र−य) = य²,

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

अर्थात् $य^2 + रय = र^2$, वा $य = र\ \dfrac{\sqrt{५} - १}{२}$ यतः ज्या १८°

$= ज्यावअड = \dfrac{वड}{अड} = \dfrac{१}{२}, \dfrac{वक}{वअ} = \dfrac{१}{२} \cdot \dfrac{य}{२} = \dfrac{\sqrt{५}-१}{४}$

प्र० ४८. अथाष्टादशांशानां ज्या साध्यते प्रकारान्तरेण।

कल्प्यतां १८° = अ येन २ अ = ३६°, ३अ = ५४°

अतः २अ = ९०° − ३अ

अत एव ज्या २अ = ज्या (९०° − ३ अ) = कोज्या ३अ

∴ २ ज्याअ कोज्याअ = $४कोज्या^3अ - ३कोज्याअ$

वा, $४कोज्या^3अ - ३कोज्याअ - २\ ज्याअ\ कोज्याअ = ०$

वा, कोज्याअ $(४\ कोज्या^2अ - २ज्याअ - ३) = ०$

वा, कोज्याअ $(४ - ४ज्या^2अ - २\ ज्याअ - ३) = ०$

वा, कोज्याअ $(१ - ४ज्या^2अ - २ज्याअ) = ०$

शून्ये गुणके जाते खमित्यनेनात्र-

कोज्याअ = ०, यद्वा $१ - ४ज्या^2अ - २ज्याअ = ०$

यदा कोज्याअ = ० तदा अ = ९०°

अथ यदि $१ - ४ज्या^2अ - २ज्याअ = ०$

तदा $१ = ४\ ज्या^2अ + २ज्याअ$ अत्रैकवर्णमध्यमाहरणरीत्या

$$ज्याअ = \frac{\pm \sqrt{५} - १}{४}$$

अत्र ज्याअ धनात्मिका तेन ज्या १८° $= \dfrac{\sqrt{५}-१}{४}$

अत्रैवानुपातेन यदि रूपव्यासार्धे इयं ज्या तदा त्रिज्याव्यासार्धे केति लब्धा चापीयाष्टादशांशज्या $= \dfrac{त्रि\,(\sqrt{५}-१)}{४} = \dfrac{\sqrt{५त्रि^2} - त्रि}{४}$

अनेनोपपन्नं भास्कराचार्यपद्यम्.

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

त्रिज्याकृतीषुघातान्मूलं त्रिज्योनितं चतुर्भक्तम्।
अष्टादशभागानां जीवा स्पष्टा भवत्येवम्।

$$\therefore \text{ कोज्या } १८^\circ = \sqrt{१ - \text{ज्या}^२ \, १८^\circ} = \sqrt{१ - \frac{६ - २\sqrt{५}}{१६}}$$

$$= \sqrt{\frac{१० + २\sqrt{५}}{१६}} = \sqrt{\frac{१० + २\sqrt{५}}{४}}$$

विशेषसिद्धान्ताः—

ज्या (अ+व) = ज्याअ कोज्याव+ज्याव कोज्याअ

तथा ज्या (अ−व) = ज्याअ कोज्याव−ज्याव कोज्याअ

अत्रानयोः स्वरूपयोर्योगेऽन्तरे च कृते-

ज्या (अ+व) + ज्या (अ−व) = २ ज्याअ कोज्याव ... (१)

ज्या (अ+व)−ज्या (अ−व) = २ कोज्याअ ज्याव ... (२)

कोज्याअ कोज्याव−ज्याअ ज्याव = कोज्या (अ+व)

कोज्याअ कोज्याव+ज्याअ ज्याव = कोज्या (अ−व)

अत्रानयोरपि पूर्ववद्योगान्तराभ्याम्—

कोज्या (अ+व) + कोज्या (अ−व) = २ कोज्याअ कोज्याव (३)

कोज्या (अ+व)−कोज्या (अ−व) = २ ज्याअ ज्याव (४)

कल्प्यताम् अ + व = क, तथा अ−व = ड

$$\text{येन अ} = \frac{\text{क+ड}}{२}, \text{ तथा व} = \frac{\text{क−ड}}{२}$$

$$\therefore \text{ ज्याक+ज्याड} = २\text{ज्या} \frac{\text{क+ड}}{२} \text{ कोज्या} \frac{\text{क−ड}}{२}$$ . . . . प्रथमः सिद्धान्तः।

$$\text{ज्याक−ज्याड} = २\text{कोज्या} \frac{\text{क+ड}}{२} \text{ ज्या} \frac{\text{क−ड}}{२}$$ . . . द्वितीयः सिद्धान्तः।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{कोज्याक}+\text{कोज्याड}=२\text{कोज्या}\frac{\text{क}+\text{ड}}{२}\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{क}-\text{ड}}{२}\ldots.$$

तृतीयः सिद्धान्तः।

$$\text{तथा कोज्याक}-\text{कोज्याड}=२\text{ज्या}\frac{\text{क}+\text{ड}}{२}\ \text{ज्या}\ \frac{\text{ड}-\text{क}}{२}\ldots.$$

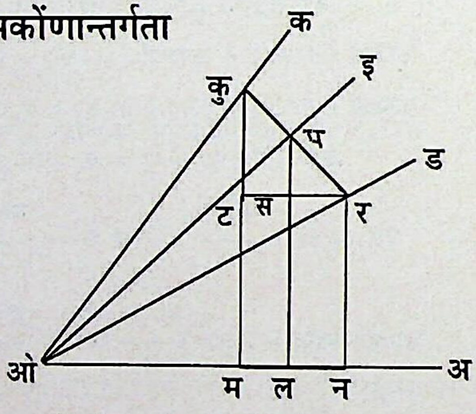
चतुर्थः सिद्धान्तः।

साधितेष्वेषु त्रि हरे दत्ते एते चापीया भवन्ति तेनात्र विशेषोक्तपद्ये उपपन्ने।।

चापविश्लेषयोगार्धजीवे कोटि ज्याकाहते।
मिथस्त्रिज्योद्धृते द्विध्न्यौ चापज्यावियुतिर्युतिः।।
चापविश्लेषयोगार्धज्ययोः कोटि ज्ययोर्हतिः।
द्विगुणा त्रिगुणाऽऽप्ता च कोटि ज्यावियुतिर्युतिः।।

प्र० ४९. अत्र क्षेत्रगता वासना।

इयं संस्था एकसमकोंणान्तर्गता



कल्प्यते अओक कोणः = क, तथा डओअ = ड, कओड कोणं ओइ रेखयाऽर्धीकृत्य,ओइ रेखायां क्वापि प विन्दुं नीत्वा ओइरेखाया उपरि कुपर लम्बः कार्यः यश्च ओक, ओड रेखायां कु, र विन्दौ मिलति। ओअ रेखोपरि पल, कुम, रन लम्बाः कार्याः तथा र विन्दोः पल, कुमरेखयोरूपरि रसट लम्बः कार्यः यश्च ते रेखिके स, ट विन्दोः क्रमशो मिलति।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

यतः $\angle$ डओक=क–ड, तथा $\angle$डओइ, $\angle$इओक प्रत्येकं= $\frac{\text{क–ड}}{२}$

तथा $\angle$अओइ= $\angle$अओइ+$\angle$डओइ = ड + $\frac{\text{क–ड}}{२}$ = $\frac{\text{क+ड}}{२}$

यतः Δ पओर, Δ पओकु सर्वथा समानौ अतः ओकु = ओर

तथा पर = पकु येन रकु = २रप

अतः कुट = २पस, तथा रट = २रस अर्थात् मन = २मल

अतः मकु + नर = टकु + २लस = २सप + २लस = २लप

तथा ओम + ओन = २ओम + मन = २ओम + २मल = २ओल

अतः ज्याक + ज्याड = $\frac{\text{मकु}}{\text{ओकु}}$ + $\frac{\text{नर}}{\text{ओर}}$ = $\frac{\text{मकु+नर}}{\text{ओर}}$ =

$\frac{\text{२लप}}{\text{ओर}}$ = २ $\frac{\text{लप}}{\text{ओप}} \cdot \frac{\text{ओप}}{\text{ओर}}$

= २ ज्या लओप कोज्या पओर = २ज्या $\frac{\text{क+ड}}{२}$ कोज्या $\frac{\text{क-ड}}{२}$

एवं पुनः ज्याक–ज्याड = $\frac{\text{मकु}}{\text{ओकु}}$ – $\frac{\text{नर}}{\text{ओर}}$ = $\frac{\text{मकु–नर}}{\text{ओर}}$ = $\frac{\text{टकु}}{\text{ओर}}$

= २ $\frac{\text{सप}}{\text{ओर}}$ = २ $\frac{\text{सप}}{\text{रप}} \cdot \frac{\text{रप}}{\text{ओर}}$

= २कोज्या सपर ज्या रओप = २कोज्या $\frac{\text{क+ड}}{२}$ ज्या $\frac{\text{क-ड}}{२}$

(यतः सपर = ९०° – $\angle$लपओ = $\angle$लओप = $\frac{\text{क+ड}}{२}$.)

तथा कोज्या क + कोज्याड = $\frac{\text{ओम}}{\text{ओकु}}$ + $\frac{\text{ओन}}{\text{ओर}}$ = $\frac{\text{ओम+ओन}}{\text{ओर}}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$= २ \frac{ओल}{ओर} = २ \frac{ओल}{ओप} \cdot \frac{ओप}{ओर}$$

$$=२ \text{ कोज्या लओप . कोज्या पओर}=२\text{कोज्या} \frac{क+ड}{२} \text{ कोज्या } \frac{क-ड}{२}$$

$$\text{एवमन्त्ये कोज्याड–कोज्याक}= \frac{ओन}{ओर} - \frac{ओम}{ओकु} = \frac{ओन-ओम}{ओर} =$$

$$\frac{मन}{ओर} = २ \frac{सर}{ओर}$$

$$= २ \frac{सर}{पर} \cdot \frac{पर}{ओर} = २ \text{ ज्या सपर ज्या पओर}$$

$$= २\text{ज्या} \frac{क+ड}{२} \text{ ज्या } \frac{क-ड}{२} \text{ इत्युपपन्नम्।}$$

एते सिद्धान्ताः परमोपयोगिनः अतस्ते एतत्सम्बन्धीयप्रश्नानामुत्तरेण विशेषतोऽभ्यसनीयाः। अत्र पदार्थयोर्योगोऽन्तरं वा भिन्नपदार्थयोर्घातरूपे परिवत्तितं भवति।

शालिनी–प्रकरण ४९, (प्रथम खण्ड के सप्तमाध्ययास्थ) जिन चार सिद्धान्तों को क्षेत्रगत वासना के माध्यम से दर्शाया गया है– वे सभी परम उपयोगी है। इस लिये इससे सम्बन्धित प्रश्नों का उत्तर का अभ्यास विशेषरूप से करना चाहिये पदार्थों का योग और अन्तर या भिन्न पदार्थों (दो पदार्थ) का गुणन (घात) रूप में परिवर्तित होता है। अतः विचारणीय है।

$$\text{उ १. ज्या}६\text{इ}+\text{ज्या }४\text{इ} = २\text{ज्या } \frac{६\text{ इ} + ४\text{ इ}}{२} \text{ कोज्या } \frac{६\text{इ}-४\text{इ}}{२}$$

$$= २\text{ज्या }५\text{इ कोज्याइ}$$

$$\text{उ २. कोज्या}३\text{इ}-\text{कोज्या}७\text{इ} = २\text{ज्या } \frac{३\text{इ}+७\text{इ}}{२} \text{ ज्या } \frac{७\text{इ} - ३\text{इ}}{२}$$

$$= २\text{ज्या }५\text{ इ ज्या }२\text{ इ}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

उ ३. $\dfrac{\text{ज्या } ७५ - \text{ज्या } १५^\circ}{\text{कोज्या } ७५^\circ + \text{कोज्या } १५^\circ}$

$$= \dfrac{२ \text{ कोज्या } \dfrac{७५^\circ + १५^\circ}{२} \text{ ज्या } \dfrac{७५^\circ - १५^\circ}{२}}{२ \text{ कोज्या } \dfrac{७५^\circ + १५^\circ}{२} \text{ कोज्या } \dfrac{७५^\circ - १५^\circ}{२}}$$

$$= \dfrac{२ \text{ कोज्या } ४५^\circ \text{ ज्या } ३०^\circ}{२ \text{ कोज्या } ४५^\circ \text{ कोज्या } ३०^\circ} = \text{स्प } ३०^\circ = \dfrac{१}{\sqrt{३}} = \dfrac{\sqrt{३}}{३}$$

उ. ४ $\dfrac{(\text{कोज्याइ} - \text{कोज्या३इ})\ (\text{ज्या } ८ \text{ इ} + \text{ज्या } २ \text{ इ})}{(\text{ज्या } ५ \text{ इ} - \text{ज्याइ})\ (\text{कोज्या } ४ \text{ इ} - \text{कोज्या } ६ \text{ इ})}$

$$= \dfrac{२ \text{ ज्या } \dfrac{\text{इ} + ३ \text{ इ}}{२} \text{ ज्या } \dfrac{३ \text{ इ} - \text{इ}}{२} \times २ \text{ ज्या } \dfrac{८\text{इ} + २ \text{ इ}}{२} \text{ कोज्या } \dfrac{८\text{इ} - २ \text{ इ}}{२}}{२ \text{ कोज्या } \dfrac{५ \text{ इ} + \text{इ}}{२} \text{ ज्या } \dfrac{५ \text{ इ} - \text{इ}}{२} \times २ \text{ ज्या } \dfrac{४\text{इ} + ६\text{इ}}{२} \text{ ज्या } \dfrac{६ \text{ इ} - ४\text{इ}}{२}}$$

$$= \dfrac{४ \text{ ज्या } २ \text{ इ ज्या इ ज्या } ५ \text{ इ कोज्या } ३\text{इ}}{४ \text{ कोज्या } ३ \text{ इ ज्या } २ \text{ इ ज्या } ५ \text{ इ ज्याइ}} = १$$

(१९) अत्र केचित्प्रश्नाः साध्यन्ताम्।

१. $\dfrac{\text{कोज्या अ} - \text{कोज्या } ३ \text{ अ}}{\text{ज्या } ३\text{अ} - \text{ज्याअ}} = \text{स्प } २ \text{ अ}$

२. $\dfrac{\text{कोज्या } ४ \text{ इ} - \text{कोज्याइ}}{\text{ज्याइ} - \text{ज्या } ४ \text{ इ}} = \text{स्प } \dfrac{५ \text{ इ}}{२}$

३. ज्या $(६०^\circ + \text{आ}) - $ ज्या $(६०^\circ - \text{आ}) =$ ज्याआ

४. कोज्या $(३०^\circ - \text{आ}) +$ कोज्या $(३०^\circ + \text{आ}) = \sqrt{३}$ कोज्याआ

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

५. $\dfrac{\text{कोज्या (२ अ–३ व) + कोज्या ३ व}}{\text{ज्या (२ अ–३ व) + ज्या ३ व}}$ = कोस्पअ

६. $\dfrac{\text{ज्या (अ+व)–ज्या ४ व}}{\text{कोज्या (अ+व) +कोज्या ४व}}$ = स्प $\dfrac{\text{अ–३व}}{\text{२}}$

उ. १. ज्या ५ आ + ज्या २ आ–ज्याआ

= ज्या २आ (२ कोज्या ३ आ+१) इति साध्यताम्।

अत्र प्रथमः पक्षः = (ज्या ५ आ–ज्या आ) +ज्या२आ

= २कोज्या३आ ज्या२आ+ज्या२आ=ज्या२आ (२कोज्या३आ+१)

उ.२. कोज्या २ इ कोज्याइ – ज्या ४ इ ज्या इ

= कोज्या ३ इ कोज्या२इ साध्यताम्।

प्रथमः पक्षः = $\frac{१}{२}$(कोज्या३इ+कोज्याइ)– $\frac{१}{२}$(कोज्या ३इ–कोज्या५इ)

= $\frac{१}{२}$ (कोज्याइ+कोज्या५इ) = कोज्या३इ कोज्या२इ

उ.३. कोज्या २०° +कोज्या १००° +कोज्या १४०° अत्र किंमानम्

कोज्या २०° +(कोज्या १००° +कोज्या १४०°) =

कोज्या २०°+ २ कोज्या १२०° कोज्या २०°

= कोज्या २०°+२(– $\frac{१}{२}$) कोज्या २०°=कोज्या २०°–कोज्या २०°= ०

(२०) अभ्यासार्थ प्रश्नाः।

१. कोज्या३अ+ज्या२अ–ज्या४अ = कोज्या३अ (१–२ज्याअ)

२. कोज्याइ+कोज्या२इ+कोज्या५इ=कोज्या२इ (१+२कोज्या३इ)

३. ज्या३अ+ज्या७अ+ज्या१०अ=४ज्या५अकोज्या $\frac{७अ}{२}$ कोज्या $\frac{३अ}{२}$

४. ज्याअ+२ज्या३अ+ज्या५अ=४ज्या३अकोज्या²अ

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

५. $\frac{\text{ज्याअ+ज्या२अ+ज्या४अ+ज्या५अ}}{\text{कोज्याअ+कोज्या२अ+कोज्या४अ+कोज्या५अ}}$ = स्प ३ अ

६. कोज्या३अज्या२अ–कोज्या४अज्याअ=कोज्या२अज्याअ

साध्यन्ताम्—

७. कोज्या५अ कोज्या२अ–कोज्या४अ कोज्या३अ=–ज्या२अ ज्याअ

८. कोज्या२अकोज्या५अ=कोज्या^{2} $\frac{\text{७अ}}{\text{२}}$ –ज्या^{2} $\frac{\text{३अ}}{\text{२}}$

९. ज्या (अ+व+र)+ज्या (अ-व-र)+ज्या (अ+व-र)+ज्या (अ-व+र)

= ४ ज्याअ कोज्याव कोज्यार

१०. ज्या २अ+ज्या२व+ज्या २ र–ज्या२ (अ+व+र)

=४ ज्या (व+र) ज्या (र+अ) ज्या (अ+व)

११. ४ज्याअ ज्या (६०° + अ) ज्या (६०°–अ) = ज्या ३अ

१२. कोज्या^{2}अ+कोज्या^{2} (६०°+अ)+कोज्या^{2} (६०°–अ) = $\frac{\text{३}}{\text{२}}$

१३. ज्या^{2}अ+ज्या^{2} (१२०°+अ)+ज्या^{2} (१२०°–अ) = $\frac{\text{३}}{\text{२}}$

१४. कोज्या २०° कोज्या ४०° कोज्या ८०° = $\frac{\text{१}}{\text{८}}$

१५. ज्या२०° ज्या४०° ज्या८०° = $\frac{\text{१}}{\text{८}}\sqrt{\text{३}}$

प्र० ५० त्रिभुजकोणानाश्रित्य त्रैकोणमितिकविशेषचमत्काराः।

अवक त्रिभुजे ∠ अ + ∠ व + ∠ क = १८०° अतः

ज्या (व+क) = ज्याअ, कोज्या (अ+व) = –कोज्याक,

स्प (क+अ) = –स्पव, कोज्याव = – कोज्या (क+अ)

ज्याक = ज्या (अ+व), कोस्पअ = – कोस्प (व+क)

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

पुनः $\frac{अ}{२} + \frac{व}{२} + \frac{क}{२} = ९०°$ अतः कोज्या $\frac{अ+व}{२}$ = ज्या $\frac{क}{२}$

ज्या $\frac{क+अ}{२}$ = कोज्या $\frac{व}{२}$, स्प $\frac{व+क}{२}$ = कोस्प $\frac{अ}{२}$

कोज्या $\frac{क}{२}$ = ज्या $\frac{अ+व}{२}$, ज्या $\frac{अ}{२}$ = कोज्या $\frac{व+क}{२}$

स्प $\frac{व}{२}$ = कोस्प $\frac{क+अ}{२}$

उ. १. यदि अ+व+क = १८०° तदा

ज्या २अ+ज्या२व+ज्या २क = ४ ज्याअ ज्याव ज्याक

ज्या२अ+ज्या२व+ज्या२क = २ज्या (अ+व) कोज्या (अ-व)

+२ज्याक कोज्याक = २ज्याक कोज्या (अ-व)+२ज्याक कोज्याक

= २ ज्याक { कोज्या (अ–व) + कोज्याक }

= २ ज्याक { कोज्या (अ–व) कोज्या (अ+व) }

= २ ज्याक × २ ज्याअ ज्याव = ४ ज्याअ ज्याव ज्याक

(२१) यदि अ + व + क १८०° तदा निम्नलिखित प्रश्नाः साध्यन्ताम्।

१. ज्या २ अ+ज्या २ व–ज्या २ क=४ कोज्याअ कोज्याव ज्याक

२. कोज्या २ अ+कोज्या २ व+कोज्या २ क

= –१–४ कोज्या अ कोज्याव कोज्याक

३. कोज्या २ अ+कोज्या २व–कोज्या २क

= १–४ ज्याअ ज्याव कोज्याक

४. ज्याअ+ज्याव+ज्याक = ४ कोज्या $\frac{अ}{२}$ कोज्या $\frac{व}{२}$ कोज्या $\frac{क}{२}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

५. ज्याअ+ज्याव−ज्याक = ४ज्या $\frac{अ}{२}$. ज्या $\frac{व}{२}$ कोज्या $\frac{क}{२}$

६. कोज्याअ+कोज्याव+कोज्याक=१+४ ज्या $\frac{अ}{२}$ ज्या $\frac{व}{२}$ ज्या $\frac{क}{२}$

७. ज्या^{२}अ+ज्या^{२}व−ज्या^{२}क = २ ज्याअ ज्याव कोज्याक

८. कोज्या^{२}अ+कोज्या^{२}व=कोज्या^{२}क

= १−२ कोज्याअ कोज्याव कोज्याक

९. ज्या^{२} $\frac{अ}{२}$ +ज्या^{२} $\frac{व}{२}$+ज्या^{२} $\frac{क}{२}$ =१−२ज्या $\frac{अ}{२}$ ज्या $\frac{व}{२}$ ज्या $\frac{क}{२}$

१०.स्प $\frac{अ}{२}$ स्प $\frac{व}{२}$ + स्प $\frac{व}{२}$ स्प $\frac{क}{२}$ + स्प $\frac{क}{२}$ स्प $\frac{अ}{२}$ = १

११. ज्या (व+२ क) + ज्या (क+२ अ) + ज्या (अ+२ व)

= ४ ज्या $\frac{व-क}{२}$ ज्या $\frac{क-अ}{२}$ ज्या $\frac{अ-व}{२}$

१२. $\frac{\text{ज्या२अ+ज्या२व+ज्या२क}}{\text{ज्याअ+ज्याव+ज्याक}}$ = ८ ज्या $\frac{अ}{२}$ ज्या $\frac{व}{२}$ ज्या $\frac{क}{२}$

१३. ज्या (व+क−अ)+ज्या (क+अ−व)+ज्या (अ+व−क)=

४ ज्याअ ज्याव ज्याक

यदि अ+व+क=२ स तदा साध्यान्ताम्

१४. कोज्या^{२}अ+कोज्या^{२}व+कोज्या^{२}क+२कोज्याअकोज्याव कोज्याक

= १+४ कोज्यास कोज्या (स−अ) कोज्या (स−व) कोज्या(स−क)

प्र० ५१. यदि त्रयः कोणा एतादृशा भवन्ति यत्तेषां योगः = १८०° तदानेकचमत्कारकराः विषयाः द्रष्टव्या भवन्ति यथाऽत्र कानिचिदुदाहरणानि प्रकाश्यन्ते

उ. १. यदि अ+व+क = १८०° तदा ज्या२अ+ज्या२ब+ज्या२क

= ४ ज्याअ ज्याव ज्याक इति साध्यताम्।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

ज्या२अ+ज्या२व+ज्या२क = २ज्या (अ+व) कोज्या (अ–व)

+ २ज्याक. कोज्या क .

यतः अ+व+क = १८०° अतः अ+व = १८०° –क,

अत एव ज्या (अ+व) = ज्याक

तथा कोज्या (अ+व) = –कोज्याक .

अतः ज्या२अ + ज्या२व + ज्या२क

= २ज्याक कोज्या (अ–व) + २ज्याक . कोज्याक

= २ज्याक [कोज्या (अ–व) + कोज्याक]

= २ज्याक [कोज्या (अ–व) – कोज्या (अ+व)]

= २ज्याक . २ज्याअ ज्याव

= ४ज्याअ . ज्याव . ज्याक

उ. २ यदि अ+व+क = १८०° तदा कोज्याअ + कोज्याव–कोज्याक

$= -\text{१}+\text{४}\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{अ}}{\text{२}}\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{व}}{\text{२}}\ \text{ज्या}\ \frac{\text{क}}{\text{२}}$ इति साध्यताम्।

कोज्याअ + (कोज्याव–कोज्याक)

$= \text{२}\ \text{कोज्या}^{\text{२}}\ \frac{\text{अ}}{\text{२}} - \text{१} + \text{२}\ \text{ज्या}\frac{\text{व}+\text{क}}{\text{२}}\ \text{ज्या}\ \frac{\text{क}-\text{व}}{\text{२}}$

इदानीं व + क = १८०° –अ, अतः $\frac{\text{व}+\text{क}}{\text{२}} = \text{९०}^\circ - \frac{\text{अ}}{\text{२}}$

अतः $\text{ज्या}\frac{\text{व}+\text{क}}{\text{२}} = \text{कोज्या}\ \frac{\text{अ}}{\text{२}}$ तथा $\text{कोज्या}\frac{\text{व}+\text{क}}{\text{२}} = \text{ज्या}\ \frac{\text{अ}}{\text{२}}$

अत एव पूर्वपक्षः कोज्याअ + (कोज्याव–कोज्याक)

$= \text{२कोज्या}^{\text{२}}\ \frac{\text{अ}}{\text{२}} - \text{१} + \text{२}\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{अ}}{\text{२}}\ \text{ज्या}\ \frac{\text{क}-\text{व}}{\text{२}}$

$= \text{२}\ \text{कोज्या}\frac{\text{अ}}{\text{२}}\left[\text{कोज्या}\ \frac{\text{अ}}{\text{२}} + \text{ज्या}\ \frac{\text{क}-\text{व}}{\text{२}}\right] - \text{१}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$= २ \text{ कोज्या} \frac{अ}{२} \left[\text{ज्या} \frac{व+क}{२} + \text{ज्या} \frac{क-व}{२} \right] - १$$

$$= २ \text{ कोज्या} . \frac{अ}{२} \; २ \text{ ज्या} \frac{क}{२} \text{ कोज्या} \frac{व}{२} - १$$

$$= - १ + ४ \text{ कोज्या} . \frac{अ}{२} \text{ कोज्या} \frac{व}{२} \quad \text{ज्या} \frac{व.}{२}$$

उ. ३. यदि अ + व + क = १८०° तदा ज्या^{२}अ + ज्या^{२}व + ज्या^{२}क

= २ + २ कोज्याअ कोज्याव कोज्याक इति साध्यताम्।

कल्प्यते स = ज्या^{२}अ + ज्या^{२}व + ज्या^{२}क

येन २ स =२ ज्या^{२}अ + १ – कोज्या२व + १–कोज्या२क

= २ज्या^{२}अ + २–२ कोज्या (व+क) कोज्या (व-क)

= २–२ कोज्या^{२}अ + २–२ कोज्या (व+क) कोज्या (व-क)

∴ स = २+कोज्याअ [कोज्या (व–क) + कोज्या (व+क)]

यतः कोज्याअ=कोज्या { १८०° –(व+क) } = –कोज्या (व+क)

∴ स = २+कोज्याअ .२ कोज्याव कोज्याक

= २ + २ कोज्याअ कोज्याव कोज्याक

उ.४. यदि अ + व + क = १८०° तदा स्पअ + स्पव + स्पक

= स्पअ . स्पव . स्पक . इति साध्यताम्।

यतः स्प (अ+व) = स्प (१८०°–क) = –स्पक

$$\therefore \frac{\text{स्पअ+स्पव}}{\text{१–स्पअ.स्पव}} = :–\text{स्पक}$$

अतः स्पअ+स्पव = –स्पक+स्पअ . स्पव . स्पक

अर्थात् –

स्पअ+स्पव+स्पक = स्पअ . स्पव . स्पक

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

उ.५. यदि या + का + नी = याकानी तदा $\frac{२या}{१-या^२} + \frac{२का}{१-का^२} + \frac{२नी}{१-नी^२}$

$$= \frac{२या}{१-या^२} \cdot \frac{२का}{१-का^२} \cdot \frac{२नी}{१-नी^२}$$ इति साध्यताम्।

कल्प्यतां या = स्पअ, का = स्पव, नी = स्पक तथा

स्पअ+स्पव+स्पक = स्पअ - स्पव - स्पक

$$\therefore \frac{स्पअ+स्पव}{१-स्पअ\ स्पव} = -स्पक \therefore स्प(अ+व) = स्प(१८०^\circ - क) = स्प\ (\pi\ - क)$$

अत एव अ+व+क = न π + π,

$$\therefore \frac{२या}{१-या^२} + \frac{२का}{१-का^२} + \frac{२नी}{१-नी^२} = \frac{२स्पअ}{१-स्पअ^२} + \frac{२स्पव}{१-स्पव^२} + \frac{२स्पक}{१-स्पक^२}$$

= स्प२अ+स्प२व+स्प२क = स्प२अ . स्प२व . स्प२क

अतः पूर्वोक्तयुक्त्या = $\frac{२या}{१-या^२} + \frac{२का}{१-का^२} + \frac{२नी}{१-नी^२}$

$$= \frac{२य}{१-य^२} \cdot \frac{२का}{१-का^२} \cdot \frac{२नी}{१-नी^२}$$

(२२) प्रश्नाः।

यदि य+र+ल = यरल तदा

१. $$\frac{३य-य^३}{१-३य^२} + \frac{३र-र^३}{१-३र^२} + \frac{३ल-ल^३}{१-३ल^२}$$

$$= \frac{३य-य^३}{१-३य^२} \cdot \frac{३र-र^३}{१-३र^२} \cdot \frac{३ल-ल^३}{१-३ल^२}$$

तथा २. य $(१-र^२)$ $(१-ल^२)$ + र $(१-ल^२)$ $(१-य^२)$

+ ल $(१-य^२)$ $(१-र^२)$ = ४यरल

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

३. यदि अ+व+क = १८०° तदा

$$\frac{\text{कोस्पव} + \text{कोस्पक}}{\text{स्पअ} + \text{स्पक}} + \frac{\text{कोस्पक} + \text{कोस्पअ}}{\text{स्पक} + \text{स्पव}} + \frac{\text{कोस्पअ} + \text{कोस्पव}}{\text{स्पअ} + \text{स्पव}} = १$$

४. $$\frac{\text{स्पअ} + \text{स्पव} + \text{स्पक}}{(\text{ज्याअ}+\text{ज्याव}+\text{ज्याक})^{२}} = \frac{\text{स्प}\,\frac{\text{अ}}{२}\,\text{स्प}\,\frac{\text{व}}{२}\,\text{स्प}\,\frac{\text{क}}{२}}{२\ \text{कोज्या कोज्याव कोज्याक}}$$

५. $$\frac{\text{ज्या (व-र)}}{\text{ज्याव ज्यार}} + \frac{\text{ज्या (र-अ)}}{\text{ज्यार ज्याअ}} + \frac{\text{ज्या (अ-व)}}{\text{ज्याअ ज्याव}} = ०$$

६. ज्याअ कोज्या (व+र)-ज्याव कोज्या (अ+र) =

कोज्यार ज्या (अ-व)

७. (कोज्याअ-ज्याअ) (कोज्या२अ-ज्या२अ) = कोज्याअ-ज्या३अ

८. यदि स्पइ = $\frac{\text{व}}{\text{अ}}$, तदा अ कोज्या२ इ+व ज्या२इ = अ

९. साध्यताम् ज्या२अ+कोज्या२अ= $\frac{(१+\text{स्पअ})^{२} - २\text{स्प}^{२}\text{अ}}{(१+\text{स्प}^{२}\text{अ})^{२}}$

१०. यदि अ+व = ४५° तदा (१+स्पअ) (१+स्पव) = २साध्यताम्

११. कोज्या १२° + कोज्या ६०° + कोज्या ८४° =

कोज्या २४° + कोज्या ४८°

प्र० ५२ विशेषसिद्धान्ताः।

यदि २अ इत्यस्य स्थाने अ कल्प्यते

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

तदा अ इत्यस्य स्थाने $\frac{अ}{२}$ अतः पूर्वोक्तनियमानुसारेण

$$ज्याअ = २ज्या \frac{अ}{२} कोज्या \frac{अ}{२} \quad .....(१)$$

$$कोज्या\ अ = कोज्या^२ \frac{अ}{२} - ज्या^२ \frac{अ}{२} = २कोज्या^२ \frac{अ}{२} - १$$

$$= १-२\ ज्या^२ \frac{अ}{२} ....(२)$$

$$तथा\ स्पअ = \frac{२स्प \frac{अ}{२}}{१-स्प^२ \frac{अ}{२}} ....(३)$$

$$(१)\ इत्यतः\ ज्याअ = \frac{२\ ज्या \frac{अ}{२}.\ कोज्या \frac{अ}{२}}{कोज्या^२ \frac{अ}{२} + ज्या^२ \frac{अ}{२}}$$

अत्र हरभाज्यौ कोज्या$^२ \frac{अ}{२}$ अनेनापवर्तितो तदा $= \frac{२\ स्प \frac{अ}{२}}{१+स्प^२ \frac{अ}{२}}$

$$कोज्या\ अ = \frac{कोज्या^२ \frac{अ}{२} - ज्या^२ \frac{अ}{२}}{कोज्या^२ \frac{अ}{२} + ज्या^२ \frac{अ}{२}} = \frac{१-स्प^२ \frac{अ}{२}}{१+स्प^२ \frac{अ}{२}}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(२) इत्यतः $\text{कोज्याअ} = १ - २\text{ज्या}^{२}\dfrac{\text{अ}}{२}$,

$$\text{अतः } २\text{ज्या}^{२}\frac{\text{अ}}{२} = १ - \text{कोज्याअ},$$

$$\text{अत एव ज्या}\frac{\text{अ}}{२} = \pm\sqrt{\frac{१-\text{कोज्याअ}}{२}} \quad .....(१)$$

$$\text{पुनः कोज्याअ} = २\text{कोज्या}^{२}\frac{\text{अ}}{२} - १,$$

$$\therefore\ २\ \text{कोज्या}^{२}\frac{\text{अ}}{२} = १ + \text{कोज्याअ}.$$

$$\text{अत एव कोज्या}\frac{\text{अ}}{२} = \pm\sqrt{\frac{१+\text{कोज्याअ}}{२}} \quad .....(२)$$

$$\text{अतः स्प}\frac{\text{अ}}{२} = \frac{\text{ज्या}\frac{\text{अ}}{२}}{\text{कोज्या}\frac{\text{अ}}{२}} = \pm\frac{\sqrt{१-\text{कोज्याअ}}}{\sqrt{१+\text{कोज्याअ}}} \quad ....(३)$$

प्र० ५३. अकोणसम्बन्धेन $\dfrac{\text{अ}}{२}$ कोणज्याकोटिज्यादीनां विचारः।

$$२\ \text{ज्या}\frac{\text{अ}}{२}\ \text{कोज्या}\frac{\text{अ}}{२} = \text{ज्याअ}. \quad ..(१)$$

{ प्रथमः द्वयोर्योगेन पश्चात्(२)इत्यत्र(१) संशोध्य जाते स्वरूपे

$$\text{ज्या}^{२}\frac{\text{अ}}{२} + \text{कोज्या}^{२}\frac{\text{अ}}{२} = १ \text{ सर्वदा } (२)$$

$$\because \text{ज्या}^{२}\frac{\text{अ}}{२} + २\text{ज्या}\frac{\text{अ}}{२}\ \text{कोज्या}\frac{\text{अ}}{२} + \text{कोज्या}^{२}\frac{\text{अ}}{२} = १ + \text{ज्याअ}$$

$$\text{तथा ज्या}^{२}\frac{\text{अ}}{२} - २\text{ज्या}\frac{\text{अ}}{२}\ \text{कोज्या}\frac{\text{अ}}{२} + \text{कोज्या}^{२}\frac{\text{अ}}{२} = १ - \text{ज्याअ}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{अर्थात्} \left(\text{ज्या}\frac{\text{अ}}{२} + \text{कोज्या}\frac{\text{अ}}{२}\right)^२ = १ + \text{ज्याअ}$$

$$\text{तथा} \left(\text{ज्या}\frac{\text{अ}}{२} - \text{कोज्या}\frac{\text{अ}}{२}\right)^२ = १ - \text{ज्याअ}$$

$$\text{एत एव ज्या}\frac{\text{अ}}{२} + \text{कोज्या}\frac{\text{अ}}{२} = \pm\sqrt{१+\text{ज्याअ}} \quad \ldots(३)$$

$$\text{तथा ज्या}\frac{\text{अ}}{२} - \text{कोज्या}\frac{\text{अ}}{२} = \pm\sqrt{१-\text{ज्याअ}} \quad \ldots(४)$$

पुनरनयोर्योगेनान्तरेण च जाते स्वरूपे।

$$२\,\text{ज्या}\frac{\text{अ}}{२} = \pm\sqrt{१+\text{ज्याअ}} \pm \sqrt{१-\text{ज्याअ}} \ldots\ldots\ldots(५)$$

$$\text{तथा } २\,\text{कोज्या}\frac{\text{अ}}{२} = \pm\sqrt{१+\text{ज्याअ}} \mp \sqrt{१-\text{ज्याअ}} \ldots(६)$$

एते सिद्धान्ताः परमोपयोगिनः।

प्र० ५४ स्पर्शअ सम्बन्धेन $\frac{\text{अ}}{२}$ कोणस्य स्पर्शादीनि साध्यानि

$$\text{स्पअ} = \frac{२\text{स्प}\frac{\text{अ}}{२}}{१-\text{स्प}^२\frac{\text{अ}}{२}}$$

$$\therefore १-\text{स्प}^२\frac{\text{अ}}{२} = \frac{२}{\text{स्पअ}} \cdot \text{स्प}\frac{\text{अ}}{२}$$

$$\text{अतः स्प}^२\frac{\text{अ}}{२} + \frac{२}{\text{स्पअ}}\text{स्प}\frac{\text{अ}}{२} + \frac{१}{\text{स्प}^२\text{अ}} = १ + \frac{१}{\text{स्प}^२\text{अ}} = \frac{१+\text{स्प}^२\text{अ}}{\text{स्प}^२\text{अ}}$$

$$\therefore \text{स्प}\frac{\text{अ}}{२} + \frac{१}{\text{स्पअ}} = \pm\frac{\sqrt{१+\text{स्प}^२\text{अ}}}{\text{स्पअ}}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\therefore \text{स्प}\ \frac{\text{अ}}{२} = \frac{\pm\sqrt{१+\text{स्प}^{२}\text{अ}}-१}{\text{स्पअ}}$$

(२३) प्रश्नाः साध्यन्ताम्–

१. $\text{स्प}\left(४५^{\circ} + \frac{\text{अ}}{२}\right)\sqrt{\frac{१+\text{ज्याअ}}{२-\text{ज्याअ}}} = \text{छे अ} + \text{स्पअ}$।

२. $\text{ज्या}^{२}\left(\frac{\pi}{८} + \frac{\text{अ}}{२}\right) - \text{ज्या}^{२}\left(\frac{\pi}{८} - \frac{\text{अ}}{२}\right) = \frac{१}{\sqrt{२}}\ \text{ज्याअ}$

३. $\text{कोज्या}^{२}\text{अ} + \text{कोज्या}^{२}(\text{अ}+१२०^{\circ}) + \text{कोज्या}^{२}(१-१२०^{\circ}) = \frac{३}{२}$

४. $\text{कोज्या}^{४}\frac{\pi}{८} + \text{कोज्या}^{४}\frac{३\pi}{८} + \text{कोज्या}^{४}\frac{५\pi}{८} + \text{कोज्या}^{४}\frac{७\pi}{८} = \frac{३}{२}$

५. $\left(१+\text{स्प}\frac{\text{अ}}{२} - \frac{\text{अ}}{२}\right)\left(१+\text{स्प}\frac{\text{अ}}{२} + \text{छे}\frac{\text{अ}}{२}\right) = \text{ज्याअ छे}^{२}\ \frac{\text{अ}}{२}$

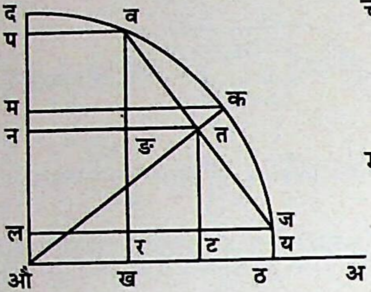
❑

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

अष्टमाध्यायः

प्र. ५५–चापीयज्यादीनां विशेषप्रपञ्चः।



चापीयज्यादीनामानयनम्। कोणीयज्यासम्बन्धेन सविशेषः प्रपञ्चः प्रदर्शितस्तत्रोपपत्तौ बहुत्र गौरवमभिलक्ष्य तदानयनं सुगमप्रकारेण चापयज्याप्रकारेणैव क्रियते तत्र योगान्तरज्याकोटिज्याऽऽनयनं

यथा–कल्प्यते यकवद वृत्तस्य प्रथमपदम् यक=प्रथमचापम् =प्र, कव=द्वितीयचापम्=द्वि=कज।

∴ यव=यक+कव=योगचापम्=यो तथा जय=अक–कव=अन्तरचापम्=अ, पव=कोज्या यो, वख=पओ=ज्या यो, जठ=ओल=ज्याअं, जल=कोज्याअं। वरज जात्यत्रिभुजे तकर्णार्धविन्दुः तट, तड भुजयोरुपरि लम्बौ तेन रट=टज, वड=डर। मक=कोज्या प्र, ओम=ज्या प्र तथा जत=ज्याद्वि, ओत=कोज्याद्वि। ओमक, ओनत त्रिभुजयोः साजात्यात्

$$\text{ओन} = \frac{\text{ओम} \times \text{ओत}}{\text{ओक}} = \frac{\text{ज्याप्र} \times \text{कोज्याद्वि}}{\text{त्रि}}$$ एवम् ओमक, तटज त्रिभुज्योः साजात्यात् $$\text{तट} = \frac{\text{कम} \times \text{जत}}{\text{ओक}} = \frac{\text{कोज्याप्र} \cdot \text{ज्याद्वि}}{\text{त्रि}}$$

∴ ओन+तट=ओन+नल=ओन+नप=पओ=ज्यायो

$$= \text{ज्या}\,(\text{प्र}+\text{द्वि}) = \frac{\text{ज्या प्र} \cdot \text{कोज्या द्वि}}{\text{त्रि}} + \frac{\text{कोज्या प्र} \cdot \text{ज्या द्वि}}{\text{त्रि}},$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

तथा ओन- तट=ओन-नल=ओल=टज=ज्याअं=ज्या (प्र-द्वि)

$$= \frac{\text{ज्याप्र} \cdot \text{कोज्याद्वि}}{\text{त्रि}} - \frac{\text{कोज्याप्र} \cdot \text{ज्याद्वि}}{\text{त्रि}}$$ अत उपपन्नं भवति।

चापयोरिष्टयोर्दोर्ज्ये मिथः कोटिज्यकाहते।
त्रिज्याभक्ते तयोरैक्यं स्याच्चापैक्यस्य दोर्ज्यका॥
चापान्तरस्य जीवा स्यात् तयोरन्तरसम्मिता।

प्र. ५६

एवमेव $\text{नत} = \frac{\text{मक} \times \text{ओत}}{\text{ओक}} = \text{लट} = \frac{\text{कोज्या प्र} \cdot \text{कोज्या द्वि}}{\text{त्रि}}$

तथा $\text{जट} = \frac{\text{ओम} \times \text{जत}}{\text{ओक}} = \frac{\text{ज्या प्र} \cdot \text{ज्या द्वि}}{\text{त्रि}}$ तेन

नत-जट=लट-रट=लर=व प=कोज्यायो=कोज्या (प्र+द्वि)

$$= \frac{\text{कोज्या प्र} \cdot \text{कोज्या द्वि}}{\text{त्रि}} - \frac{\text{ज्या प्र} \cdot \text{ज्या द्वि}}{\text{त्रि}}$$

तथा कोज्या (प्र-द्वि)=कोज्याअ=कोज्या यज=जल=लट+जट

$$= \frac{\text{कोज्या प्र} \cdot \text{कोज्या द्वि} + \text{ज्या प्र} \cdot \text{ज्या द्वि}}{\text{त्रि}}$$

अत उपपन्नम्,

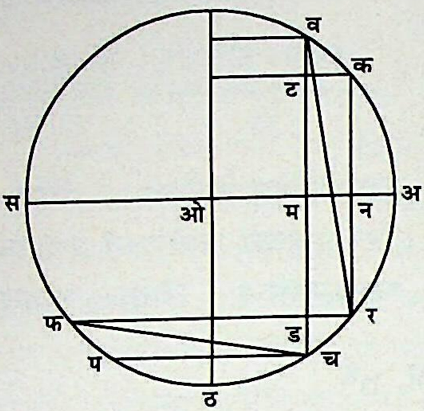
दोर्ज्ययोः कोटिमौर्व्योश्च धातौ त्रिज्योद्धृतौ तयोः।
वियोगयोगौ जीवेस्तश्चापैक्यान्तरकोटिजे॥

इति कमलाकरपद्यम्।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्र. ५७



अथ कल्प्यते अकवस वृत्तं यस्य केन्द्रं ओ, तथा अव बृहच्चापम्, अक लघुचापम् ∴ वम=ज्यावृ, कन= ज्याल=नर तेन वम+नर = वम + मड = वड = ज्यायुतिः एवं वम−मड= वम-मट=वट=ज्यान्तरम्=डच, वरड जात्यत्रिभुजे वड=ज्यायुतिः,

$$वर=२ज्या\frac{चापयोग}{२}=२ज्या\left(\frac{वृ+ल}{२}\right)$$

डर=कोज्याल-कोज्यावृ=कोटिज्यान्तरम्, ज्या∠ डवर

$$=ज्या\left(\frac{वृ-ल}{२}\right)$$ यतः परिधिलग्नकोणात्केन्द्रलग्नकोणो द्विगुणो भवति

$$ज्या \angle डरव=कोज्या \angle डवर=कोज्या\left(\frac{वृ-ल}{२}\right)$$

अतः डवर त्रिभुजे कोणानुपातेन

$$वड=ज्यावृ+ज्याल=\frac{२\ ज्या\left(\frac{वृ+ल}{२}\right)कोज्या\left(\frac{वृ-ल}{२}\right)}{त्रि}$$

$$एवम्\ डर=कोज्याल-कोज्यावृ=\frac{२\ ज्या\left(\frac{वृ+ल}{२}\right)ज्या\left(\frac{वृ-ल}{२}\right)}{त्रि}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

एवमेव डफचत्रिभुजे फड=कोज्यावृ+कोज्याल, फच चापम्=रठ+ठच

$$=९०^\circ - ल+९०^\circ - वृ=१८०^\circ - (वृ+ल) \therefore \text{ पूर्णज्याफच}$$

$$=२ज्या \frac{१८०^\circ - (वृ+ल)}{२} = २ज्या \left\{ ९०^\circ - \frac{(वृ+ल)}{२} \right\}$$

$$=२कोज्या \frac{वृ+ल}{२}, \text{ डच=ज्यावृ-ज्याल=ज्यान्तरम्}$$

$$ज्या \angle डफच=ज्या \left(\frac{वृ-ल}{२} \right), \text{ तथा ज्या } \angle डचफ$$

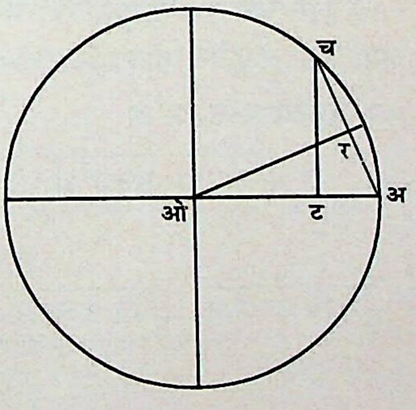
$$=कोज्या \left(\frac{वृ-ल}{२} \right), \text{ ज्या } \angle फडच=त्रि \therefore फड$$

$$=कोज्यावृ+कोज्याल= \frac{२ \text{ ज्या} \left(\frac{वृ+ल}{२} \right) \text{कोज्या} (वृ-ल)}{त्रि}$$

$$=एवम् \text{ डच=ज्यावृ-ज्याल}= \frac{२ \text{ कोज्या } (वृ+ल) \text{ ज्या } (वृ-ल)}{त्रि}$$

एतेन ८९ पृष्ठलिखितविशेषोक्तपद्ये उपपन्ने।

प्र. ५८



कल्प्यते अच चापम्, तदाचट=ज्याअचचापस्य, ओर रेखा, चअ रेखाया अर्धं करोति तस्या उपरि लम्बश्च, टअ=उत्क्रमज्या तस्यैव ज्याचापस्य

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$\therefore \sqrt{\text{चट}^{२} + \text{टअ}^{२}} = \text{चअ}$

पूर्णज्या $\therefore$ ज्या $\left(\frac{\text{चअ}}{२}\right) = \text{अर}$

$= \frac{\text{चअपूर्णज्या}}{२} = \frac{\sqrt{\text{चट}^{२} + \text{टअ}^{२}}}{२}$

इत्युपपन्नं,

क्रमोत्क्रमज्याकृतियोगमूलाद्दलं तदर्धांशकशिञ्जिनी वा।

अत्रैव प्रकारान्तरम्–

ओअर,अचट त्रिभुजयोः साजात्यात् अर $= \frac{\text{अट} \times \text{ओअ}}{\text{अच}} = \frac{\text{उज्या अच त्रि}}{२\text{अर}}$

$\therefore \text{अर}^{२} = \text{ज्या}^{२}\left(\frac{\text{अच}}{२}\right) = \frac{\text{उज्या अच} \cdot \text{त्रि}}{२}$ $\therefore$ मूलग्रहणेन

अर $=$ ज्या $\frac{\text{अच}}{२} = \sqrt{\frac{\text{उज्या अच} \cdot \text{त्रि}}{२}}$ इत्युपपन्नम्

त्रिज्योत्क्रमज्यानिहतेर्दलस्य मूलं तदर्धांशकशिञ्जिनी वा।

अस्यैव सूत्रस्य भास्करोपपत्तिर्यथा।

कल्प्यते अचचा=अ तदा कोज्याअ=त्रि-उज्याअ

$\therefore$ कोज्या^{२}अ=त्रि^{२}-२ त्रिउज्याअ+उज्या^{२}अ

अतः ज्या^{२}अ=त्रि^{२}-कोज्याअ=त्रि^{२}- (त्रि-२त्रिउज्याअ+उज्या^{२}अ)

=२ त्रिउज्याअ-उज्या^{२}अ

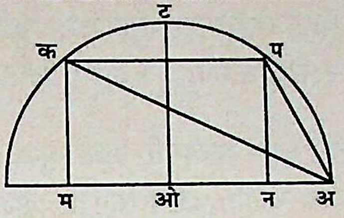
$\therefore \text{ज्या}\frac{\text{अ}}{२} = \frac{\sqrt{\text{ज्या}^{२}\text{अ} + \text{उज्या}^{२}\text{अ}}}{२} = \frac{\sqrt{२\text{त्रिउज्याअ} - \text{उज्या}^{२}\text{अ} + \text{उज्या}^{२}\text{अ}}}{२}$

$= \sqrt{\frac{२ \text{ त्रि उज्याअ}}{४}} = \sqrt{\frac{\text{त्रि उज्याअ}}{२}}$ • इत्युपपन्नम्।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्र. ५९–



कल्प्यते टक=भुजांशाः

तदा अटक $=\text{९०}^\circ+\text{भु}$

तथा अप$=\text{९०}^\circ-\text{भु}$

$\therefore$ अक=अम^{२}+मक^{२}=(अओ+उ

$=(\text{त्रि}+\text{ज्या भु})^{२}+\text{कोज्या}$

$=\text{त्रि}^{२}+\text{ज्या}^{२}\text{भु}+\text{२त्रि}\cdot\text{ज्या}$

$=\text{२त्रि}^{२}+\text{२त्रि}\cdot\text{ज्याभु}=\text{२}\,(\text{त्रि}^{२}+\text{त्रि}\cdot\text{ज्याभु})$

$$\therefore \text{ज्या}\ \frac{(\text{९०}^\circ+\text{भु})}{\text{२}}=\frac{\text{अक}}{\text{२}}=\sqrt{\frac{\text{२}\,(\text{त्रि}^{२}+\text{त्रिज्याभु})}{\text{२}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\text{त्रि}^{२}+\text{त्रिज्याभु}}{\text{२}}}$$

एवम् पअ^{२}=अन^{२}+प न^{२}=$(\text{त्रि}-\text{ज्याभु})^{२}+\text{कोज्या}^{२}\text{भु}$

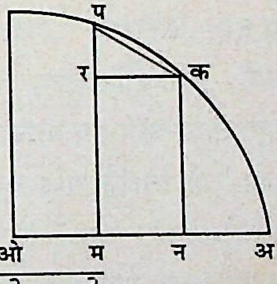
$=\text{त्रि}^{२}-\text{२ त्रिज्याभु}+\text{ज्या}^{२}\text{ भु}+\text{कोज्या}^{२}\text{भु}$

$=\text{२त्रि}^{२}-\text{२ त्रिज्याभु}=\text{२}\,(\text{त्रि}^{२}-\text{ त्रिज्याभु})$

$$\therefore \text{ज्या}\ \frac{\text{९०}^\circ-\text{भु}}{\text{२}}=\frac{\text{पअ}}{\text{२}}=\sqrt{\frac{\text{२}\,(\text{त्रि}^{२}-\text{त्रिज्याभु})}{\text{२}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\text{त्रि}^{२}-\text{२ त्रिज्याभु}}{\text{२}}}\ \text{इत्युपपन्नम्}$$

त्रिज्याभुजज्याहतिहीनयुक्ते त्रिज्याकृती तद्दलयोः पदे स्तः।
भुजोनयुक्तत्रिभखण्डयोर्ज्ये।



प्र. ६०–कल्प्यते अक=भुजः अप=भु^{२}

तदा पर=ज्याभु^{२}-ज्याभु=भुजान्तरम् कर=

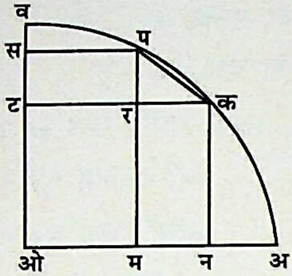
कोज्याभु-कोज्याभु^{२}=कोट्यन्तरम्।

$$\therefore \text{ज्या}\frac{\text{पकचा}}{\text{२}}=\text{ज्या}\frac{\text{भु}^{१}-\text{भु}}{\text{२}}=\frac{\text{पकपू}}{\text{२}}=\sqrt{\frac{\text{पर}^{२}+\text{कर}^{२}}{\text{२}}}\ \text{एतेनोपपन्नम्,}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

यद्दोर्ज्ययोरन्तरमिष्टयोर्यत् कोटिज्ययोस्तत्कृतियोगमूलम्। दलीकृतं स्याद्भुजयोर्वियोगखण्डस्य जीवैवमनेकधा वा॥ इति।



प्र. ६१–कल्प्यते अक भुजः, तदा कव कोटिः, अथ कोटितः भुजतुल्यं वप चापं नीत्वा ओअरेखोपरि प, क विन्द्वोः पम, कन लम्बौ कार्यो एवं ओवरेखोपरि पस, कटलम्बौ कार्यौ अथात्र कन=ज्याभु, कट=कोज्याभु एवम् सप= ज्याभु, पम=कोज्याभु तेन कर=कट-टर=कट-सप=कोज्याभु-ज्याभु एवं पर=पम-मर=पम-कन=कोज्याभु-ज्याभु अतः कर=पर

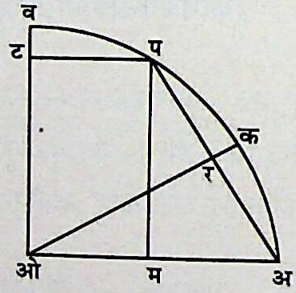
$$\text{तेन ज्या}\left(\frac{\text{को-भु}}{२}\right)=\frac{\text{पकपू}}{२}=\frac{\sqrt{\text{कर}^{२}+\text{पर}^{२}}}{२}$$

$$=\frac{\sqrt{२\text{कर}^{२}}}{२}=\sqrt{\frac{\text{कर}^{२}}{२}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\text{कोज्याभु-ज्याभु}}{२}\right)^{२}}\ \text{इत्युपपन्नम्}$$

दोःकोटिजीवाविवरस्य वर्गो दलीकृतस्तस्य पदेन तुल्या। स्यात् कोटिबाह्वोर्विवरार्धजीवा वक्ष्येऽथ मूलग्रहणं विनाऽपि॥

अथ मूलग्रहणं विना तस्यैवाऽऽनयनम्।



प्र.६२–कल्प्यते अकभुजचापं तदा वककोटिचापम् कोटितः अकतुल्यं कपचापं नीत्वा, ओक, पअ रेखे विधेये पविन्दोः जोअ, ओवरेखोपरि पम, पट लम्बौ कार्यौ तथा चापार्धविन्दुगतत्वात् ओर रेखा पअरेखोपरि लम्बः।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

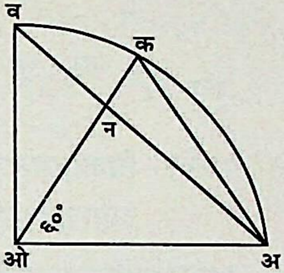
अर=ज्याभु, पअ=२ज्याभु अथ ओअर, अपम त्रिभुजयोः साजात्यात्

$$\text{अम}=\frac{\text{अर}\times\text{अप}}{\text{ओअ}}=\frac{\text{ज्याभु}+\text{२ज्याभु}}{\text{त्रि}}=\frac{\text{२ज्या}^{२}\text{भु}}{\text{त्रि}}=\frac{\text{ज्या}^{२}\text{भु}}{\frac{\text{त्रि}}{२}}=\text{ल}$$

तदा ज्या (को-भु)=पट=ओम=त्रि-अम=त्रि-ल इत्युपपन्नम्।

दोर्ज्याकृतिर्व्यासदलार्धभक्ता लब्धत्रिमौर्व्योर्विवरेण तुल्या।
दोःकोटिभागान्तरशिञ्जिनी सयाज्ज्यार्धानि वा कानिचिदेवमत्र॥

प्र.६३—कल्प्यते अव वृत्तचतुर्थांशः नवत्यंशात्मकः



$$\text{तदा ज्या } ४५^{\circ}=\frac{\text{अव}}{२}$$

$$=\frac{\sqrt{\text{ओअ}^{२}+\text{ओव}^{२}}}{२}$$

$$=\frac{\sqrt{२\text{त्रि}^{२}}}{२}=\frac{\sqrt{\text{त्रि}^{२}}}{२}$$

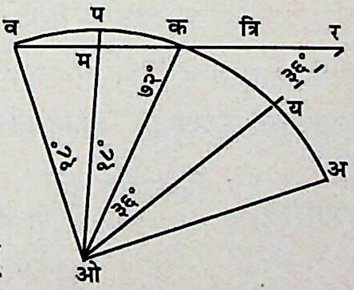
अतः **त्रिज्यावर्गार्धपदं शरवेदांशज्यकाभवतीत्युपपन्नम्।**

∠अओक=६०° निर्मितस्तदा ओअक त्रिभुजं समत्रिभुजं सम्पन्नम्, अतः अकूप=त्रि• तेन

$$\text{ज्या } ३०^{\circ}=\frac{\text{अक}}{२}=\frac{\text{त्रि}}{२}$$ **अतस्त्रिज्यार्ध राशिज्येत्युपपन्नम्।**

प्र. ६४ अथाष्टादशांशज्याऽऽनयनम्—

(रे ४।१०)



युक्त्या निर्मितं ओरव समद्विबाहुकं त्रिभुजं यत्र ओर=वर कल्प्यते पूर्ण-ज्या ३६°=या तदा क्षेत्रावलोकनेन ओवर, ओवक त्रिभुजयोः साजात्यात्

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{वक}=\text{या}=\frac{\text{ओव}\times\text{ओव}}{\text{वर}}=\frac{\text{त्रि}\times\text{त्रि}}{\text{त्रि}+\text{या}}=\frac{\text{त्रि}^{२}}{\text{त्रि}+\text{या}}$$

अतः $\text{या}\,(\text{त्रि}+\text{या})=\text{त्रि}^{२}$

वा, $\text{या}^{२}+\text{त्रिया}=\text{त्रि}^{२}$

वा $\text{या}^{२}+\text{त्रिया}+\frac{\text{त्रि}^{२}}{४}=\text{त्रि}^{२}+\frac{\text{त्रि}^{२}}{४}=\frac{५\text{त्रि}^{२}}{४}$

पक्षयोर्मूलेन $\text{या}+\frac{\text{त्रि}}{२}=\frac{\sqrt{५\text{त्रि}^{२}}}{२}$

$\therefore\ \text{या}=\frac{\sqrt{५\ \text{त्रि}^{२}}}{२}-\frac{\text{त्रि}}{२}=\frac{\sqrt{५\text{त्रि}^{२}}-\text{त्रि}}{२}$

$\therefore\ \text{ज्या}\ १८^{\circ}=\frac{\text{या}}{२}=\frac{\sqrt{५\text{त्रि}^{२}}-\text{त्रि}}{४}$

अत उपपन्नम्—त्रिज्याकृतीषुघातान्मूलं त्रिज्योनितं चतुर्भक्तम्।
अष्टादशभागानां जीवा स्पष्टा भवत्येवम्॥

अष्टादशांशज्यानयने कमलाकरगणकस्य प्रकारः

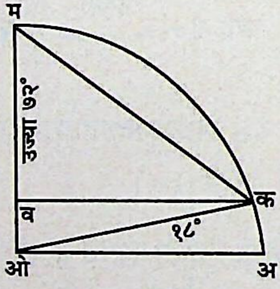
कल्प्यते $\text{ज्या}\ १८^{\circ}=\text{या}$

$\therefore\ \text{उज्या}\ ७२^{\circ}=\text{त्रि}-\text{या}$

ततः $\text{ज्या}^{२}\,३६^{\circ}=\frac{\text{त्रिउज्या}\ ७२^{\circ}}{२}$

$=\frac{\text{त्रि}\,(\text{त्रि}-\text{या})}{२}$

$=\frac{\text{त्रि}^{२}-\text{त्रिया}}{२}$



अथेदानीं उज्या ३६° आनीयते तद्यथा

$\text{ज्या}^{२}\,१८^{\circ}=\frac{\text{त्रि}\cdot\text{उज्या}\ ३६^{\circ}}{२}\ \therefore\ \text{उज्या}\ ३६^{\circ}=\frac{२\ \text{ज्या}^{२}\,१८^{\circ}}{\text{त्रि}}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$= \frac{२\ या^{२}}{त्रि} \therefore उज्या^{२}३६^{\circ} = \frac{४\ या^{४}}{त्रि^{२}}$

$\therefore पूज्या^{२}३६^{\circ} = ज्या^{२}३६^{\circ} + उज्या^{२}३६^{\circ}$

$$= \frac{त्रि^{२} - त्रिया}{२} + \frac{४या^{४}}{त्रि^{२}}$$

$$= \frac{त्रि^{४} - त्रि^{३}या + ८या^{४}}{२\ त्रि^{२}} = ४या^{२}$$

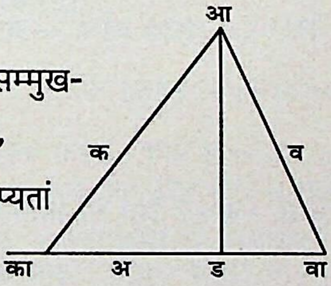
$\therefore$ छेदगमेन $त्रि^{४} - त्रि^{३}या + ८या^{४} = त्रिया$ पक्षौ (-८) अनेन गुणितौ तदा $-८त्रि^{४} + ८त्रि^{३}या - ६४\ या^{४} = -६४\ त्रि^{२}या^{२}$ पक्षौ $६४\ या^{४} + १६या^{२}त्रि^{२} + ९त्रि^{४}$ सहितौ जातौ $१६\ या^{२}त्रि^{२} + ८त्रि^{३}या + त्रि = ६४\ या^{४} - ४८ त्रि^{२}या + ९त्रि^{४}$ मूलेन $४यात्रि + त्रि^{२} = -८\ या + ३त्रि^{२}$

$\therefore ८या^{२} + ४यात्रि = ३\ त्रि^{२} - त्रि^{२} = २त्रि^{२}\ १६$ $या + ८यात्रि + त्रि = ४त्रि^{२} + त्रि^{२} = ५त्रि^{२}$

$४\ या + त्रि = \pm\sqrt{५त्रि^{२}} \therefore या = \pm\sqrt{\frac{५त्रि^{२} - त्रि}{४}}$ इत्युपपन्नम्

नवमाध्यायः

त्रिभुजसम्बन्धज्ञानम्।



प्र.६५ कस्मिंश्चिदपि त्रिभुजे भुजाः स्वसम्मुखकोणजीवाभिस्तुल्यसम्बन्धका भवन्ति,

अर्थात् $\frac{अ}{ज्याआ} = \frac{क}{ज्याका} = \frac{व}{ज्यावा}$ कल्प्यतां

अकावा न्यूनकोणत्रिभुजम्, आकोणात्तत्संमुखभुजोपरि आड लम्बो निपात्यः तदा आड=आवाज्या आवाड=कज्यावा, तथा आड=आका ज्या आकाड=वज्याका,

$\therefore$ वज्याका=कज्यावा,

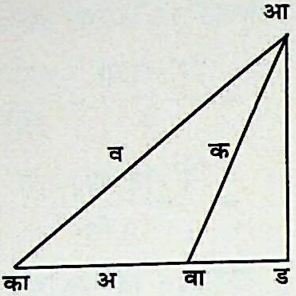
$$अर्थात्\ \frac{व}{ज्यावा} = \frac{क}{ज्याका}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

कल्प्यतां आवाका अधिककोणत्रिभुजं यत्र वा अधिककोणः

कावावर्धितरेखोपरि आड लम्बः कार्यः



तदा आड=आका ज्याआकाड

=वज्याका

तथा आड=आवा ज्याआवाड

=क ज्या (१८०°-वा)

=क ज्यावा,

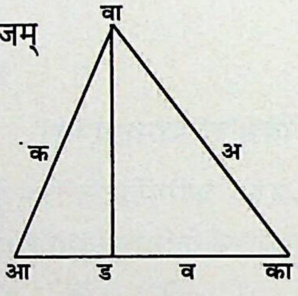
∴ व ज्याका=क ज्यावा,

अर्थात् $\frac{\text{व}}{\text{ज्यावा}} = \frac{\text{क}}{\text{ज्याका}}$

एवमेव साधितं भवति यत् प्रत्येकं सम्बन्धः $= \frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}}$

तेन $\frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}} = \frac{\text{व}}{\text{ज्यावा}} = \frac{\text{क}}{\text{ज्याका}}$

प्र.६६ अथ भुजयोस्तदन्तर्गतकोणस्य च ज्ञानादाधारज्ञानम्।



(१) कल्प्यतां आवाका लघुकोणकत्रिभुजम्

आकारेखोपरि वाड लम्बः कार्यः

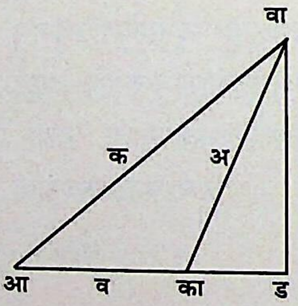
तदा (रे.२।१३) आवा^{2}= वाका^{2}

+आका^{2}-२आका काड

∴ क^2=अ^2+व^2-२वअ कोज्याका

=अ^2+व^2-२ अव कोज्याका

(२) अथ यदि आवाका त्रिभुजमधिककोणकं यत्राधिककोणः का तदा वर्धित आकारेखोपरि वाड लम्बः कार्यः तदा (रे.२।१२)



RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

आवा^{2}=वाका^{2}+काआ^2+२आकाकाड

अतः क^2=अ^2+व^2+२ वअ कोज्या वाकाड

=अ^2+व^2+२ अ व कोज्या (१८०°-का)

=अ^2+व^2-२ अ व कोज्याका

अतः प्रत्येकस्थितौ क^2=अ^2+व^2-२ अ व कोज्याका

एवमेवेदमपि स्फुटम् अ^2=व^2+क^2-२ वक कोज्याआ

व^2=क^2+अ^2-२कअ कोज्यावा

(१) अत्र कोणीयकोटिज्यास्थाने यदि चापीयकोटिज्याया उत्थापनं दीयते

तदा क^2=अ^2+व^2-२अव $\frac{\text{कोज्याका}}{\text{त्रि}}$ =अ^2+व^2- $\frac{\text{अ}\cdot\text{व}\cdot\text{कोज्याका}}{\frac{\text{त्रि}}{२}}$

अनेनोपपन्नम् कस्यचित्प्रसिद्धं पद्यम्–

भूसंमुखाश्रोद्भवकोटिशिञ्जिनी दोर्घातगुण्या त्रिगुणार्धभक्ता।
दोर्वर्गयोगो रहितस्तदा यदाधारवर्गोऽस्य पदं मही स्यात्॥

प्र.६७ पूर्वप्रतिपादितसिद्धान्तादेवैतत्समायाति

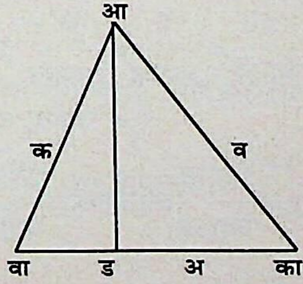
कोज्याआ= $\frac{\text{व}^2+\text{क}^2-\text{अ}^2}{२ \text{ वक}}$, कोज्याका= $\frac{\text{अ}^2+\text{व}^2-\text{क}^2}{२ \text{ अव}}$,

कोज्यावा= $\frac{\text{क}^2+\text{अ}^2-\text{व}^2}{३ \text{ कअ}}$

एतेन यत्र त्रिभुजे केवलं भुजा एव परिज्ञातास्सन्ति तत्र कोणकोटिज्याज्ञानमपि भवति ततः कोणज्ञानमपि सुगमम्।

प्र. ६८ भुजयोस्तत्संमुखकोणयोश्च ज्ञानात् तृतीयभुजज्ञानं यथा,

(१) कल्प्यताम् आवाका न्यूनकोणत्रिभुजम्।



RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

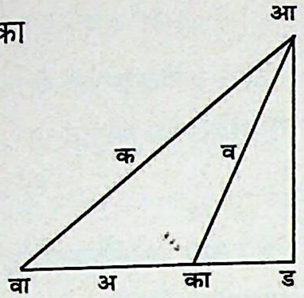
CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

कावा रेखोपरि आड लम्बः कार्यः

तदा वाका=वाड+काड

=आवा • कोज्याआवाड+आका • कोज्याआकाड

अर्थात् अ=क कोज्यावा+व कोज्याका



(२) कल्प्यते आवाका त्रिभुजे का अधिककोणः तदा वर्धितवाका रेखोपरि आड लम्बः कार्यः

तदा वाका=वाड-काड

=आवा • कोज्याआवाड

-आका कोज्याआ काड;

∴ अ=क कोज्यावा+व कोज्याका, अतः प्रत्येकस्थितौ

अ=व कोज्याका+क कोज्याअ

अनेनैव प्रकारेण व=ककोज्याआ+अ कोज्याका, तथा

क=अ कोज्यावा+व कोज्याआ

अत्राध्याये प्रतिपादिताः सिद्धान्ताः सर्वत्रोपयोग्यास्तथा परमप्रयोजनीयाः यतोऽत्र भुजानां कोणैः सह सम्बन्धः प्रदर्शितोऽस्ति तथा एकस्य ज्ञानादन्यस्य ज्ञानं भवति। अनेनैव सिद्धान्तेन जात्यत्रिभुजेऽपि साधनं भवति परञ्च जात्यत्रिभुजे स्वतन्त्ररूपेण साधनं पूर्वमेव प्रदर्शितम्।

अत्राध्याये प्रदर्शिताः सिद्धान्ताः यद्यपि स्वतन्त्ररूपेण साधिताः परं च तेऽन्यथापि साधिता भवन्ति यथा यतः आ+वा+का=१८०° परञ्च

यतः $\frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}}=\frac{\text{व}}{\text{ज्यावा}}=\frac{\text{क}}{\text{ज्याका}}$ तथा यतः ज्याआ=ज्या (वा+का)

= ज्यावा कोज्याका+ज्याका कोज्यावा;

$\therefore$ १= $\frac{\text{ज्यावा}}{\text{ज्याआ}}$ कोज्याका+ $\frac{\text{ज्याका}}{\text{ज्याआ}}$ कोज्यावा

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$\therefore$ १$=\frac{व}{अ}$कोज्याका $+\frac{क}{अ}$कोज्यावा

$\therefore$ अ=व कोज्याका+क कोज्यावा एवम्

व=क कोज्याआ+अ कोज्याका तथा

क=अ कोज्यावा+व कोज्याआ सिद्धं भवति।

एतानि त्रीण्यपि समीकरणाणि यदि अ, व, -क एभिः क्रमशो गुण्यन्ते तदा अ^{२}+व^{२}-क^{२}=२ अवकोज्याका

$\therefore$ क^{२}=अ^{२}+व^{२}-२ अवकोज्याका

एवमन्येऽपि सम्बन्धाः सिद्धा भवन्ति।

त्रिभुजसाधनप्रकारः।

प्र. ६९ त्रिभुजे हि त्रयो भुजास्तावन्त एव कोणाः तत्र त्रयाणामवयवानां ज्ञाने यत्रैको भुजस्त्वावश्यक एव शेषावयवानां ज्ञानं कथितप्रकारैः सम्यगेव भवति। यतः चतुर्षु पदार्थेषु त्रयाणां ज्ञानाच्चतुर्थस्य ज्ञानं सुकरम् यथा व^{२}=क^{२}+अ^{२}-२ कअ कोज्यावा अत्र यदि क,अ,वा ज्ञाता भवन्ति तदा व ज्ञानं सुबोधम् एवं यदि वा,का,व निर्दिष्टाः सन्ति तत्र

$\frac{क}{ज्याका}=\frac{व}{ज्यावा}$ अनेन प्रकारेण क ज्ञानं सुबोधम्।

केवलं यदि त्रयः कोणा एव विदितास्सन्ति तत्र $\frac{अ}{ज्याआ}=\frac{व}{ज्यावा}=\frac{क}{ज्याका}$

अनेन प्रकारेण सम्बन्धाः ज्ञाता भवन्ति परन्तु भुजस्य यथार्थमानं न ज्ञातुं शक्यते तत्रानेकानि समबाहुकत्रिभुजानि रचयितुं शक्यन्ते येषां सम्बन्धः पूर्वप्रदर्शितसम्बन्धसमः (रे. ६।४)

(१) प्रथमा स्थितिः। त्रिभुजं साधनीयं यत्र भुजाः निर्दिष्टास्सन्ति।

अत्र आ, वा कोणौ कोज्याआ$=\frac{व^{२}+क^{२}-अ^{२}}{२ वक}$, तथा कोज्यावा$=\frac{क^{२}+अ^{२}-व^{२}}{२ कअ}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

आभ्यां प्रकाराभ्यां ज्ञातुं शक्यौ तथा का=१८०°-वा-वा अनेन प्रकारेण भवति अतः सर्वेषां ज्ञानं भवति।

उ.१ यदि अ=७, व=५, क=८ अत्र आ, वा कोणज्ञानेऽभीष्टे,

इदमपि ज्ञातमस्ति यत् कोटिज्या ३८° ११″$=\frac{११}{१४}$

$$\text{कोज्याआ}=\frac{\text{व}^2+\text{क}^2-\text{अ}^2}{२\,\text{वक}}=\frac{५^2+८^2-७^2}{२\times५\times८}=\frac{४०}{२\times५\times८}$$

$$=\frac{१}{२}\;\therefore\;\text{आ}=६०^\circ$$

$$\text{एवम् कोज्यावा}=\frac{\text{क}^2+\text{अ}^2-\text{व}^2}{२\text{कअ}}=\frac{८^2+७^2-५^2}{२\times८\times७}$$

$$=\frac{११}{१४};\;\therefore\;\text{वा}=३८^\circ\;११''$$

उ. २ महत्तमं कोणमन्विष्यताम् यत्र भुजाः ६, १३, ११

तथेदमपि ज्ञातमस्ति यत् कोज्या ८४° ४२′$=\frac{१}{११}$

कल्प्यतां अ=६, व=१३, क=११ यतः महत्तमः कोणः महत्तम-भुजस्य संमुखस्थस्तेनाभीष्टकोणः वा, तथा कोज्यावा

$$=\frac{\text{क}^2+\text{अ}^2-\text{व}^2}{२\text{कअ}}=\frac{११^2+६^2-१३^2}{२\times११\times६}$$

$$=\frac{-१२}{२\times११\times६}\;\therefore\;\text{कोज्यावा}=-\frac{१}{११}=-\text{कोज्या}\;८४^\circ\;४७'$$

$$\therefore\;\text{वा}=१८०^\circ-८४^\circ\;४७'=९५^\circ१३'$$

अतोऽभीष्टकोणः=९५°१३′

(२) द्वितीया स्थितिः। भुजयोस्तदन्तर्गतकोणस्य च ज्ञानात् त्रिभुज-ज्ञानम्।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

कल्प्यतां व, क, आ विदितास्तदा अ भुजस्य ज्ञानं $अ^2=व^2+क^2-२$ वककोज्याआ अनेन प्रकारेण भवति ततः वा कोणज्ञानं

$$कोज्यावा=\frac{क^2+अ^2-व^2}{२ कअ}, वा\ ज्यावा=\frac{व\ ज्याआ}{अ},$$ आभ्यां प्रकाराभ्यां भवति

ततः का कोणज्ञानं च का=१८०°–आ-वा अनने भवति।

उ. १–यदि अ=३, व=७, का=९८° १३' तदा त्रिभुजं साध्यतां

यत्र कोज्या ८१० ४७' = $\frac{१}{७}$ प्रदत्ताऽस्ति।

$क^2=अ^2+व^2-२$ अवकोज्याका=९+४९-२x३x७ कोज्या ९८°१३'

परन्तु-कोज्या ९८° १३'=कोज्या ८१° ४७',

$$\therefore क^2=५८+(२x३x७\ कोज्या\ ८१°\ ४७')=५८+$$

$$(२x३x७x\frac{१}{७})=५८+६=६४, \therefore क=८$$

$$कोज्या\ वा=\frac{क^2+अ^2-व^2}{२कअ}=\frac{६४+९-४९}{२x८x३}=\frac{२४}{२x८x३}=\frac{१}{२},$$

अतः वा=६०° ∴ का=१८०°-६०°-९८° १३'=२१° ४७'

(३) तृतीया स्थितिः। कोणयोरेकस्य भुजस्य च ज्ञानात् त्रिभुजज्ञानं यथा कल्प्यतां वा, का, अ ज्ञातास्सन्ति

अत्र आ कोणज्ञानं १८०°–वा-का, तथा व, क भुजयोर्ज्ञानं च

$$व=\frac{अ\ ज्यावा}{ज्याआ} तथा\ क=\frac{अ\ ज्याका}{ज्याआ}$$ अनेन प्रकारेण भवति

उ.१ यदि आ=१०५°, का=६०°, व=४, तत्र त्रिभुजं साध्यताम्

वा=१८०°-१०५°-६०°=१५°

$$\therefore क=\frac{व\ ज्याका}{ज्या\ वा}=\frac{४\ ज्या\ ६०°}{ज्या\ १५°}=\frac{४\sqrt{३}}{२}\cdot\frac{२\sqrt{२}}{\sqrt{३}-१}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$=\frac{४\sqrt{६}}{\sqrt{३}-१}=\frac{४\sqrt{६}(\sqrt{३}+१)}{३-१}$$

$$=२\sqrt{६}(\sqrt{३}+१),\quad क=६\sqrt{२}+२\sqrt{६}$$

$$अ=\frac{व\ ज्याआ}{ज्यावा}=\frac{४\ ज्या\ १०५^\circ}{ज्या\ १५^\circ}=\frac{४\ ज्या\ ७५^\circ}{ज्या\ १५^\circ}$$

$$=४\times\frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}\times\frac{२\sqrt{२}}{\sqrt{३}-१}$$

$$=\frac{४(\sqrt{३}+१)}{\sqrt{३}-१},\ \therefore\ अ=४(२+\sqrt{३})$$

(२४) अभ्यासर्थं प्रश्नाः

१ यदि अ=१५, व=७, क=१३ तत्र का कोणः साध्यः

२ यदि अ=२५, व=३१, क=७ $\sqrt{२}$ तत्र आमानं किम्

३ त्रिभुजे यदि भुजाः २, $२\frac{२}{३}$, $३\frac{१}{३}$ तत्र महत्तमः कोणः साध्यः

४ यदि अ=२, व= $\sqrt{३}+१$, का=६०° तत्र कमानमानेयम्

५ यत्र अ=३, क=५, वा=१२०° तत्र व मानं किम्

६ यदि आ=४५° वा=१०५°, क= $\sqrt{२}$ तत्र त्रिभुजं साधनीयम्

७ यदि का=१२०°, क=२ $\sqrt{३}$, अ=२ तत्र वमानं साध्यम्

८ यदि (अ+व+क) (व+क-अ)=३ वक तत्र आ कोणमानं किम्?

९ यत्र भुजाः ३+ $\sqrt{३}$, २ $\sqrt{३}$, $\sqrt{६}$ तत्र कोणाः के?

१० यत्र भुजाः $\frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}$; $\frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}}$; $\frac{\sqrt{३}}{२}$ तत्र कोणाः के?

११ त्रिभुजयोर्द्वौ भुजौ क्रमेण $\frac{१}{\sqrt{६}-\sqrt{२}}$ तथा $\frac{१}{\sqrt{६}+\sqrt{२}}$ तथा तदन्तर्गतकोणश्च ६०° तत्र त्रिभुजं साध्यताम्।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

त्रिभुजे यदा कोणज्ञानं कोणज्याज्ञानावति तत्र सन्देह उत्पद्यते यतः कोणज्या कोणोनभार्धांशज्या तुल्या भवति धनात्मिका च। तत्र द्वे माने एको निर्दिष्टकोणः अपरश्च कोणोनभार्धांशतुल्यः एवं १८०° अंशाभ्यन्तरे कोणद्वयस्य सम्भवः। यदि कोणज्ञानं कोटिज्यावशेन भवति तदा न सन्देहलेशावसरः यतः १८०° अंशाभ्यन्तरे यस्य कोणस्य कोटिज्या निर्दिष्टकोटिज्या तुल्या तादृशः एक एव कोणः यथा यदि ज्याआ$=\frac{१}{२}$ तदा आ$=$३०° वा १५०° यदि कोज्याआ$=\frac{१}{२}$, तदा आ$=$६०°

उ.१ यदि का$=$६०°, व$=२\sqrt{३}$, क$=३\sqrt{२}$, तदा आमानं किम्

$$\text{ज्या वा}=\frac{\text{व ज्याका}}{\text{क}},\ \text{ज्या वा}=\frac{२\sqrt{३}}{३\sqrt{२}}\cdot\frac{\sqrt{३}}{२}=\frac{१}{\sqrt{२}},$$

$\therefore$ वा$=$४५° वा, १३५°

अत्र वा मानं १३५° न ग्रहणीयं यतोऽत्र वा तथा का कोणयोगः १३५°$+$६०°$=$१९५°, १८०° एभ्योऽधिको भवति!

(४) चतुर्थी स्थितिः। य क भुजौ ज्ञातौस्तस्तथैकस्य भुजस्य संमुखकोणस्य च ज्ञानमस्ति तत्र त्रिभुजज्ञानं यथाः–

कल्प्यतां अ, व भुजौ आ कोणश्च विदिताः सन्ति तदा वा कोणज्ञानम्

ज्यावा$=\frac{\text{व}}{\text{अ}}$ ज्याआ अनेन प्रकारेण भवति

(i) अथ यदि अ $\angle$ वज्याआ, तदा$\frac{\text{व ज्याआ}}{\text{अ}} > १$ येन ज्यावा > १

यदसंभवम् अतस्तत्र न त्रिभुजसाधनम्।

(ii) यदि अ$=$व ज्याआ, तदा $\frac{\text{व ज्याआ}}{\text{अ}}=१$ येन ज्यावा$=$१

तदा वा कोणमानमेकमेव$=$९०°

(iii) यदि अ $>$ व ज्याआ, तदा $\frac{\text{वज्याआ}}{\text{अ}} \angle १$,तथात्र वा कोणस्य द्वे

मानेभवितुं योग्ये यतः ज्यावा$=\frac{\text{व}\cdot\text{ज्याआ}}{\text{अ}}$ अत्रैको न्यूनकोणः अपरश्चाधिककोणः

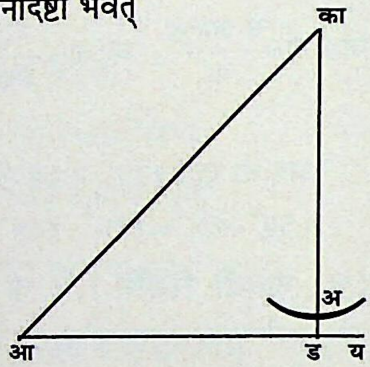
RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(क) यदि अ∠व तदा आ∠वा अतः वा न्यूनकोणो भवतु अधिक-कोणो वा द्वावपि कोणौ गृहीतुं योग्यौ अत्रैव द्विविधमानप्रसङ्गः

(ख) यदि अ=व, तदा आ=वा तथा यदि अ > व तदा आ > वा प्रत्येक स्थितौ वा अधिककोणो न स्यात् अतः वा इत्यस्य अल्प-मानमेव ग्राह्यम् यदा वा कोणस्य ज्ञानं जातं तदा १८०°-आ-वा =का कोणः, अन्त्ये क इत्यस्य च ज्ञानं अर्थात् यतः $क = \frac{अ\ ज्याका}{ज्याआ}$

ऊर्ध्वदर्शितप्रकारैरिदं स्पष्टं यत् द्विविधमानस्य स्थितिस्तदैव यदा स्वल्पतरस्य भुजस्य संमुखकोणो निर्दिष्टो भवेत्



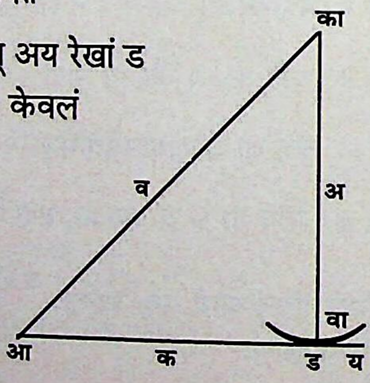
रेखागणितेनापि सन्देह-स्थितिः स्फुटीक्रियतेकल्प्यतां अ, व, आ विदितावयवाः, गृह्यतां आय महती रेखा या यदिशि वर्धितास्ति, तथा आ कोणतुल्यः यआका कोणो रचनीयः तथा आका, व तुल्यः कार्यः। काड लम्बश्च आय रेखोपरि कार्यः, तदा

काड=वज्याआ पुनः का केन्द्रात् अ व्यासार्धेनैकं वृत्तं रचनीयम्

(i) यदि अ ∠ वज्याआ, तदा वृत्तं आय रेखां न स्पृशति, अतो निर्दिष्टावयवैस्त्रिभुजं निर्मातुं न शक्यते

(ii) यदि अ=वज्याआ, तदा वृत्तम् अय रेखां ड विन्दौ स्पृशति, अतो निर्दिष्टावयवैः केवलं जात्यत्रिभुजं निर्मातुं शक्यते

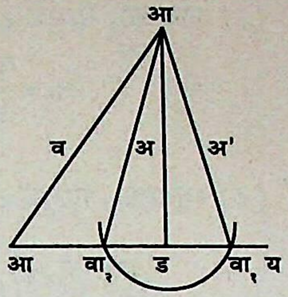
(iii) यदि अ > वज्याआ तदा वृत्तम् आय रेखां $वा_१$, $वा_२$ विन्दुद्वये छिनत्ति



RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

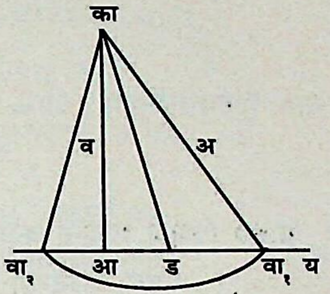
CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(क) द्वावपि विन्दू आ कोणस्य एकस्यामेव दिशि भवतः यदा अ∠व, तस्यां स्थितौ त्रिभुजद्वयं जायते यथा आवा$_१$ का, आवा$_२$ का अत्रैव मानद्वयावसरः।



(ख) अथ वा$_१$ वा$_२$ विन्दू आ कोणस्य संमुखविरुद्धदिशोः भवतः यदा अ > व

अस्यां स्थितौ केवलमेकमेवोत्तरं यतः काआवा$_२$ कोणः निर्दिष्टकोणोनभार्धांशः अतः आवा$_२$ का त्रिभुजे निर्दिष्टावयवा न भवन्ति।



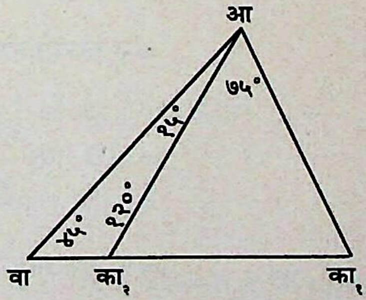
(ग) अथ यदि अ=व, तदा वा$_२$ विन्दुः आ विन्दौ गच्छति अतस्त्राप्येकमेवोत्तरम्।

उदा. १ यदि वा=४५°, क= $\sqrt{१२}$, व= $\sqrt{८}$, तत्र त्रिभुजं साध्यताम्

$$ज्याका=\frac{क\ ज्यावा}{व}=\frac{२\sqrt{३}}{२\sqrt{२}}\times\frac{१}{\sqrt{२}}=\frac{\sqrt{३}}{२}$$

$\therefore$ का=६०° वा १२०°

तथा यतः व < क अतोऽत्र द्वे अपि माने ग्रहीतुं शक्येते। द्वे अपि त्रिभुजे यत्र निर्दिष्टावयवाः गृहीतुं शक्यन्ते यथा क्षेत्रे।



वाका$_१$ वाका$_२$ भुजौ अ$_१$ अ$_२$ आभ्यां तथा वा आका$_१$ वाआका$_२$ कोणौ आ$_१$ आ$_२$ कोणाभ्यां क्रमशः प्रकाश्येते तदा

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(i) आवाका$_{१}$ त्रिभुजे < आ$_{१}$=७५°

$$\therefore \text{अ}_{१} = \frac{\text{वज्याआ}_{१}}{\text{ज्यावा}} = \frac{२ \quad २}{\frac{१}{२}} \cdot \frac{३+१}{२ \quad २} = २ (\quad ३+१)$$

(ii) आवाका$_{२}$ त्रिभुजे < आ$_{२}$=१५°

$$\text{अतः अ}_{२} = \frac{\text{वज्याआ}_{२}}{\text{ज्यावा}} = \frac{२ \quad २}{\frac{१}{२}} \cdot \frac{३-१}{२ \quad २} = २ (\quad ३-१)$$

अतः पूर्णमुत्तरमिदम् $\left\{ \begin{array}{l} \text{का}=६०°, \text{ वा } १२०° \\ \text{आ} = ७५°, \text{ वा } १५° \\ \text{आ} \quad ६+ \quad २, \text{ वा } ६- \quad २ \end{array} \right.$

प्र.७० त्रिभुजे भुजानां कोणानाञ्च सहयोगेन पूर्वदर्शितप्रकारेण बहवः सम्बन्धाः साधिता भवन्ति यथा–

उ.१ $(\text{व-क}) \text{ कोज्या } \frac{\text{आ}}{२} = \text{अ ज्या} \frac{\text{वा-का}}{२}$ इति साध्यताम्

कल्प्यतां $\text{च} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्या आ}} = \frac{\text{व}}{\text{ज्या वा}} = \frac{\text{क}}{\text{ज्या का}}$;

तदा अ=चज्याआ, व=चज्यावा, क=चज्याका,

$$\therefore (\text{व-क}) \text{ कोज्या } \frac{\text{आ}}{२} = \text{च (ज्यावा-ज्याका) कोज्या } \frac{\text{आ}}{२}$$

$$= २ \text{ च कोज्या} \frac{\text{वा+का}}{२} \text{ज्या} \frac{\text{वा-का}}{२} \text{कोज्या } \frac{\text{आ}}{२}$$

$$= २ \text{ च ज्या } \frac{\text{आ}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{आ}}{२} \text{ ज्या} \frac{\text{वा-का}}{२}$$

$$= \text{च ज्याआ} \cdot \text{ज्या} \frac{\text{वा-का}}{२} = \text{अ ज्या} \frac{\text{वा-का}}{२}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

उ.२ यदि अ कोज्या$^2\frac{का}{२}$ +क कोज्या$^2\frac{आ}{२} = \frac{३व}{२}$, तदा

त्रिभुजभुजाः चयोत्तरश्रेष्ठ्यां सन्तीति दर्शय

यतः २अ कोज्या$^2\frac{का}{२}$ +२क कोज्या$^2\frac{आ}{२}$ =३व,

∴ अ (१+कोज्याका) +क (१+कोज्याआ)=३व,

∴ अ+क+ (अकोज्याका+क•कोज्याआ)=३व,

∴ अ+व+क=३ व ∴ अ+क=२व

अतः अ, व, क भुजाः चयोत्तरश्रेढ्यां सन्ति

उ.३ (व^2-क^2) कोस्पआ+ (क^2-अ^2) कोस्पवा+ (अ^2-व^2) कोस्पका=० इति प्रमाणीक्रियताम्

कल्प्यतां च=$\frac{अ}{ज्याआ}=\frac{व}{ज्यावा}=\frac{क}{ज्याका}$, तदा

$$च^2\left\{(ज्या^2वा-ज्या^2का)\frac{कोज्याआ}{ज्याआ}+...+...\right\}$$

$$=च^2\left\{ज्या\,(वा+का)\,ज्या\,(वा-का)\,\frac{कोज्याआ}{ज्याआ} +...+..\right\}$$

परन्तु ज्या (वा+का)= ज्याआ, तथा कोज्याआ

=−कोज्या (वा+का),

अतः प्र-प• =-च^2 {ज्या (वा-का) कोज्या (वा+का)+....+....}

$$=-\frac{च^2}{२}\{(ज्या\ २\ वा-ज्या\ २\ का) + (ज्या\ २\ का-ज्या\ २\ आ) + (ज्या\ २\ आ-ज्या\ २\ वा)\}=०$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(२५) अभ्यासार्थं प्रश्नाः।

१. अ (ज्यावा-ज्याका)+व(ज्याका-ज्याआ)
+क (ज्याआ-ज्यावा)=०

२. २ (वक कोज्याआ+कअ कोज्यावा+अवकोज्याका)
$=अ^{२}+व^{२}+क^{२}$

३. अ (व कोज्या का-क कोज्या वा)= $व^{२}-क^{२}$

४. (व+क) कोज्याआ+(क+अ) कोज्यावा
+ (अ+व) कोज्याका=अ+व+क

५. $२\left(अ\ ज्या^{२}\frac{का}{२}+क\ ज्या^{२}\frac{आ}{२}\right)=क+अ-ब$

६. $\frac{कोज्यावा}{कोज्याका}=\frac{क-व\ कोज्याआ}{व-ककोज्याआ}$

७. $स्पआ=\frac{अज्याका}{व-अ\ कोज्याका}$

८. $(व+क)\ ज्या\frac{आ}{२}=अ\ कोज्या\frac{वा-का}{२}$

९. $\frac{अ+व}{क}ज्या^{२}\frac{का}{२}=\frac{कोज्याआ+कोंज्या\ वा}{२}$

१०. अ ज्या (वा-का)+व ज्या (का-आ)+क ज्या (आ-वा)=०

११. $\frac{ज्या\ (आ-वा)}{ज्या\ (आ+वा)}=\frac{अ^{२}-व^{२}}{क^{२}}$

१२. $\frac{क\ ज्या\ (आ-वा)}{व\ ज्या\ (का-आ)}=\frac{अ^{२}-व^{२}}{क^{२}-अ^{२}}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्र.७१ द्विविधमानात्मिकास्थितिरन्यथापि प्रतिपादयितुं शक्यते

यथा पूर्वं कल्प्यते अ, व, आ विदितावयवास्तदा

$$\text{कोज्याआ}=\frac{\text{व}^{2}+\text{क}^{2}-\text{अ}^{2}}{\text{२वक}}, \therefore \text{क}^{2}-\text{२वकोज्याआ}\cdot\text{क}+\text{व}^{2}-\text{अ}^{2}=0$$

तदैकवर्णमध्यमाहरणविशेषनियमेन

$$\text{क}=\text{व कोज्याआ} \pm \sqrt{\text{व}^{2}\,\text{कोज्या}^{2}\text{आ}+\text{अ}^{2}-\text{व}^{2}}$$

$$=\text{व कोज्याआ} \pm \sqrt{\text{अ}^{2}-\text{व}^{2}\,\text{ज्या}^{2}\text{आ}}$$

(i) यदा अ<व ज्याआ, तदा मूलान्तर्गतं वस्तु ऋणात्मकं तथा क मानमसम्भवम् अतस्तत्र नोत्तरम्।

(ii) यदा अ=वज्याआ, तदा मूलान्तर्गतं वस्तु शून्यसमं तथा क=वकोज्याआ यतः ज्याआ <१ अस्मादिदमायाति यत् अ<व, अतः आ<वा अतस्त्रिभुजमसंभवं केवलं आकोणस्य न्यूनकोणरूपां स्थितिं विहाय, तस्यां स्थितौ क मानं धनं तथा तत्र एकमेव मानम्।

(iii) यदा अ>वज्याआ, तत्र त्रिधा स्थितिर्विचारणीया।

(क) कल्प्यतां अ<व तदा आ<वा, अतस्तत्रापि त्रिभुजमसंभवं केवलं आ कोणस्य न्युनत्वं विहाय। तस्यां स्थितौ वकोज्याआ धनम्।

तथा $\sqrt{\text{अ}^{2}-\text{व}^{2}\,\text{ज्या}^{2}\text{आ}}$ इयं यथार्थसंख्या तथा< $\sqrt{\text{व}^{2}-\text{व}^{2}\,\text{ज्या}^{2}\text{आ}}$ अर्थात् $\sqrt{\text{अ}^{2}-\text{व}^{2}\,\text{ज्या}^{2}\text{आ}}$<व कोज्याआ, यथार्थसंख्या तथा अतः क इत्यस्य मानद्वयं धनात्मकं यथार्थसंख्यात्मकं च।

(ख) कल्प्यते अ>व, तदा $\sqrt{\text{अ}^{2}-\text{व}^{2}\text{ज्या}^{2}\text{आ}}$,> $\sqrt{\text{व}^{2}-\text{व}^{2}\,\text{ज्या}^{2}\text{आ}}$ अर्थात् $\sqrt{\text{अ}^{2}-\text{व}^{2}\text{ज्या}^{2}\text{आ}}$>व कोज्याआ, अतः क इत्य-स्यैकं मानं धनात्मकं अपरं च ऋणात्मकं, यद्यत्र आकोणो न्यून-कोणोऽधिको वा, तथा प्रत्येकस्थितावेकमेवोत्तरम्।

(ग) कल्प्यतां अ=व, तदा $\sqrt{\text{अ}^{2}-\text{व}^{2}\text{ज्या}^{2}\text{आ}}$=व•कोज्याआ;

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

∴ क=२व कोज्याआ, वा ०, अतस्तत्रैकमेवोत्तरं यदि आ न्यून-कोणः तथा यदा आ अधिककोणस्तदा त्रिभुजमेवासम्भवम्।

उ.१ यदि व, क, वा ज्ञातास्सन्ति तथा यदि व<क तदा $(अ_१-अ_२)^२ + (अ_१+अ_२)^२$ स्प^{२}वा=४व, यत्र $अ_१$, $अ_२$, तृतीयभुजस्य मानद्वये।

सिद्धान्ततः कोज्यावा$=\frac{क^२+अ^२-व^२}{२कअ}$ ∴ $अ^२$-२ककोज्यावा अ$+क^२-व^२=०$

परन्तु समीकरणस्यास्य मानद्वयम् $अ_१$, $अ_२$, अत एकवर्णमध्य-माहरणविशेषसिद्धान्तेन

$$अ_१+अ_२=२ककोज्यावा \text{ तथा } अ_१\ अ_२=क^२-व^२$$

$$∴ (अ_१-अ_२)^२=(अ_१+अ_२)^२-४अ_१अ_२=४ककोज्यावा-४(क^२-व^२)$$

$$∴ (अ_१-अ_२)^२ + (अ_१+अ_२)^२ स्प^२वा$$

$$=४क^२ कोज्या^२वा-४(क^२-व^२)+४क^२ कोज्या^२वा\ स्प^२वा$$

$$=४क^२(कोज्या^२वा+ज्या^२वा)-४क^२+४व^२=४क^२-४क^२+४व^२=४व^२$$

(२६) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

१. यदि कस्मिंश्चित् त्रिभुजे आधारलग्नकोणौ शीर्षकोणतो द्विगुणौ तथाऽऽधारः २ तदा त्रिभुजं साधय।

२. यदि वा=४५°, का=७५°, तथा अविन्दोः वाका रेखोपरि लम्बः=३ तदा त्रिभुजं साधय

३. यदि अ=२, व=४-२$\sqrt{३}$, क=३$\sqrt{२}$-$\sqrt{६}$ तदा त्रिभुजं साधय

४. यदि आ=१८°, व-अ=२, अव=४ तदान्यकोणज्ञानं क्रियताम्।

५. कस्यचित् त्रिभुजस्य भुजाः २य+३, $य^२$+३य+३, $य^२$+२य, तदा तत्र महत्तमः कोणः १२०° इति साधय

६. कस्मिंश्चित्त्रिभुजे (व-अ) कोज्याका+क (कोज्यावा- कोज्याआ) $=$ कज्या$\frac{आ-वा}{२}$ कोछे$\frac{आ+वा}{२}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

७. $\text{अ} \cdot \text{ज्या}\left(\frac{\text{आ}}{२} + \text{वा}\right) = (\text{व}+\text{क})\ \text{ज्या}\ \frac{\text{आ}}{२}$

८. $\text{ज्या}\left(\text{वा}+\frac{\text{का}}{२}\right)\text{कोज्या}\ \frac{\text{का}}{२} = \frac{\text{अ}+\text{च}}{\text{व}+\text{क}}\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{आ}}{२}\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{वा}-\text{का}}{२}$

९. $\frac{१+\text{कोज्या}\ (\text{आ}-\text{वा})\ \text{कोज्याका}}{१+\text{कोज्या}\ (\text{आ}-\text{का})\ \text{कोज्यावा}} + \frac{\text{अ}^२+\text{व}^२}{\text{अ}^२+\text{क}^२}$

१०. यदि $\text{क}^४-२\ (\text{अ}^२+\text{व}^२)\text{क}^२+\text{अ}^४+\text{अ}^२\text{व}^२+\text{व}^४=०$, तदा

का=६०° वा १२०° इति साधय

११. यदि आ=४५° तथा $\text{क}_१\text{क}_२$ द्विविधमानात्मकस्य भुजस्य माने तदा

कोज्या $\text{वा}_१$ $\text{कावा}_२ = \frac{२\text{क}_१\text{क}_२}{\text{क}_१^{\,२}+\text{क}_२^{\,२}}$

१२. यदि कोज्याआ+२ कोज्याका : कोज्याआ+२ कोज्यावा

=ज्या वा: ज्याका

तदा त्रिभुजं समद्विबाहुकमथवा जात्यमिति प्रमाणीक्रियताम्।

१३. यदि अ,व,क चयोत्तरश्रेठ्यां तदा कोस्प $\frac{\text{आ}}{२}$, कोस्प $\frac{\text{वा}}{२}$,

कोस्प $\frac{\text{का}}{२}$ अपि चयोत्तरश्रेढ्यामेव भवति।

१४. $\frac{\text{अ}^२\text{ज्या}\ (\text{वा}-\text{का})}{\text{ज्यावा}+\text{ज्याका}} + \frac{\text{व}^२\text{ज्या}\ (\text{का}-\text{आ})}{\text{ज्याका}+\text{ज्याआ}} +$

$\frac{\text{क}^२\text{ज्या}\ (\text{आ}-\text{वा})}{\text{ज्याआ}+\text{ज्यावा}} = ०$ इति साध्यतामू

१५. कस्मिन्नपि त्रिभुजे साध्यताम्

(i) $\text{व}^२$ ज्या२का+$\text{क}^२$ ज्या२वा=२वकज्याआ,

(ii) $\frac{\text{अ}^२\text{ज्या}\ (\text{वा}-\text{का})}{\text{ज्याआ}} + \frac{\text{व}^२\text{ज्या}\ (\text{का}-\text{आ})}{\text{ज्यावा}} + \frac{\text{क}^२\text{ज्या}\ (\text{आ}-\text{वा})}{\text{ज्याका}} = ०$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

१६. यदि आ, वा, का, डा कस्यचिद्विषमचतुर्भुजस्य कोणास्तदा

$$\frac{\text{स्प आ}+\text{स्प वा}+\text{स्प का}+\text{स्प डा}}{\text{कोस्पआ}+\text{कोस्पवा}+\text{कोस्पका}+\text{कोस्पडा}}=\text{स्पआ स्पवा स्पका स्पडा}$$

इति साध्यताम्।

उत्तरमाला

अभ्यास प्र. (३) पृ. १९, २०

(१) $\frac{\sqrt{५}}{२}$, ५ (२) $\frac{\sqrt{४८}}{७}, \frac{१}{\sqrt{४८}}$ (३) $\sqrt{२}$

(५) $\frac{\text{प}}{\text{क}}$ (६) $\frac{\text{म}^२-१}{२\text{म}}, \frac{\text{म}^२-१}{\text{म}^२+१}$ (७) $\frac{\text{प}^२-\text{क}^२}{\text{प}^२+\text{क}^२}, \frac{\text{प}^२+\text{क}^२}{२\text{पक}}$

(८) ३, (९) $\frac{\text{प}^२-\text{क}^२}{\text{प}^२+\text{क}^२}$ (१०) $\frac{३}{४}$, (११) $\frac{१}{\sqrt{२}}$

(१२) $१+\sqrt{२}$ (१३) $\frac{२\text{य}(\text{य}+१)}{२\text{य}^२+२\text{य}+१}, \frac{२\text{य}+१}{२\text{य}^२+२\text{य}+१}$

अभ्यास प्र. (४) पृ. २४

(१) $१\frac{१}{२}$ (२) $२\frac{१}{३}$ (३) $\frac{१}{२}$ (४) $१\frac{१}{२}$ (५) ९

(६) २ (७) $२\frac{१}{१२}$ (८) ० (९) $१\frac{११}{१२}$ (१०) $\frac{\sqrt{३}}{२}$ (११) ६

अभ्यास प्र. (५) पृ. २६

(१) ९° (२) $२२^\circ ३०'$ (३) १५° (१३) १ (१४) स्पअ

अभ्यास प्र. (६) पृ. २८

(१) ६०° (२) ४५° (३) ४५° (४) ४५° (५) ६०°
(६) ३०° (७) ३०° (८) ६०° (९) ४५° वा ३०°
(१०) ६०° (११) $४५^\circ, ५०^\circ १२'$ (१२) $४५^\circ, २६^\circ ३४'$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

अभ्यास प्र. (७) पृ. ३०

(१) क=८ $\sqrt{३}$, आ=३०°, वा=६०°

(२) क=३० $\sqrt{३}$, वा=३०°, का=६०°

(३) अ=२ $\sqrt{२}$, वा=का=४५°

(४) का=९०, अ=२०, क=४०

(५) आ=९०°, अ=४ $\sqrt{२}$, व=४

(६) आ=९०°, व=४, क=४ ३, (७) ३१.

अभ्यास प्र. (८) पृ. ३२

(१) १० $\sqrt{३}$=१७.३२ (२) अ=१० $\sqrt{२}$=१४.४ (३) १२, ४

(४) २० (३+ $\sqrt{३}$)=९४.६४ (५) $\sqrt{३}$•४८

अभ्यास प्र. (९) पृ, ३८, ३९

(१) १७३°२ ह. (२) २२°५ ह. ३८° ९७ ह. (३) ६०°

(४) २० (३+ $\sqrt{३}$)=९४•६४. (५) ५१ ह.८१ह. (६) ८६•६ह.

(७) ४६•१९ ह. (८) १३६•६ ह. (९) २० ह. ३४•६४ ह.

(१०) १६० ह, (११) २२५ ह, (१२) १३६•६ ह,

(१३) वंशौच्च्यम् ५००, आत्मवंशान्तरम् ५७६

(१४) भूमानं हस्ताः २८८०, वंशौच्च्यं हस्ताः ३३

(१५) आत्मवंशान्तरं हस्ताः ८८, वंशौच्च्यं हस्ताः ६३

अभ्यास प्र. (१०)

(१) $-\sqrt{३}$ (२) $\frac{१}{\sqrt{२}}$, (३) $-\frac{१}{२}$, (४) $-\frac{१२}{१३}$, $\frac{१२}{५}$

(५) $-\frac{५}{४}$, $-\frac{३}{४}$, (६) $\frac{४}{३}$, $-\frac{३}{५}$, (७) $\frac{\sqrt{३}}{२}$, $-\frac{१}{\sqrt{३}}$

(८) १, $-\sqrt{२}$ (९) $\pm\frac{५}{१३}$, $\pm\frac{५}{१२}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

अभ्यास प्र. (११) पृ. ५०

(६) ३, (७) १, (८) -२, (९) २

अभ्यास प्र. (१२) पृ. ५६, ५७

(१) $-\frac{१}{\sqrt{२}}$ (२) $\frac{१}{२}$ (३) $\sqrt{३}$ (४) $-\sqrt{२}$ (५) $-\frac{\sqrt{३}}{२}$

(६) १ (७) -१ (८) $-\frac{\sqrt{३}}{२}$ (९) -२ (१०) $-\sqrt{२}$

(११) ज्याअ (१२) स्पअ (१३) - कोज्याअ (१४) १

(१५) २ ज्याअ (१६) १

अभ्यास प्र. (१३)

(१) $-\frac{१}{२}$ (२) $-\frac{\sqrt{३}}{२}$ (३) $\frac{१}{२}$ (४) -१ (५) $-\frac{१}{\sqrt{३}}$

(६) $-\sqrt{२}$ (७) $\frac{१}{\sqrt{२}}$ (८) $\frac{१}{\sqrt{२}}$ (९) $-\frac{१}{\sqrt{२}}$ (१०) - १

(११) २ (१२) $\frac{२}{\sqrt{३}}$ (१३) $\pm ३०^\circ$, $\pm ३३०^\circ$

(१४) २१०°, ३३०°, -३०°, -१५०° (१५) १२०°, ३००° -६०°, -२४०°

(१६) १३५°, ३१५°, -४५, -२२५$^\circ$ (१९) ३ (२०) -१ (२२) -४

अभ्यास प्र. (१४) पृ. ६७, ६८

[१] $न\pi + (-१)\frac{न\pi}{६}$ [२] $न\pi - (-१)\frac{न\pi}{३}$

[३] $न\pi + (-१)\frac{न\pi}{४}$ [४] $२न\pi \pm \frac{२\pi}{३}$

[५] $२ न\pi \pm \frac{\pi}{६}$ [६] $२न\pi + \frac{३\pi}{४}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

[७] $न\pi + \frac{\pi}{३}$ [८] $न\pi + \frac{३\pi}{४}$ [९] $+ \frac{\pi}{४}$

[१०] $२न\pi \pm \frac{\pi}{३}$ [११] $न\pi + (-१)न\pi \frac{न\pi}{३}$

[१२] $न\pi \pm \frac{\pi}{३}$ [१३] $न\pi \pm \frac{\pi}{४}$ [१४] $न\pi \pm \frac{\pi}{६}$

[१५] $न\pi \pm \frac{\pi}{३}$ [१६] $न\pi \pm \frac{\pi}{४}$ [१७] $न\pi \pm \frac{\pi}{६}$

[१८] $(२न+१)\pi + \frac{\pi}{४}$ [१९] $२न\pi, - \frac{\pi}{६}$

[२०] १०५° तथा ४५°, $(न+ \frac{म}{२})\pi \pm \frac{\pi}{६} + (-१)\frac{म\pi}{१२}$

तथा $(\frac{म}{२} - न)\pi \mp \frac{\pi}{६} + (-१)\frac{म\pi}{१२}$ यत्र म, न पूर्णधने च

[२१] $१८७\frac{१^\circ}{२}$ तथा $१४२\frac{१^\circ}{२}$ [२२] ६०° तथा १२०°

प्र. (२४) पृ. १२२

(१) ६०° (२) ४५° (३) ९०° (४) $\sqrt{६}$ (५) ७ (६) का$=३०^\circ$ अ$=२$, व$=\sqrt{३}+१$ (७) २ (८) ६०° (९) १०५°, ४५°, ३०°

(१०) १०५°, १५°, ६०°, (११) $\frac{\sqrt{३}}{२}$, १०५°, १५°

प्र. (२६) पृ. १३१

(१) ७२°, ७२°, ३६° प्रत्येकभुजमानम् $\sqrt{५}+१$

(२) आ$=६०^\circ$ अ$=९-३\sqrt{३}$, व$=३(\sqrt{६}-\sqrt{२})$, क$=३\sqrt{२}$,

(३) आ$=१०५^\circ$, वा$=१५^\circ$, का$=६०^\circ$

(४) वा$=५४^\circ$, १२६°, का$=१०८^\circ$, ३६°

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

दशमाध्यायः।

प्र. ७२ लघुरिक्थगणितम्

कस्याप्याधाररूपस्याङ्कस्य वर्गधनादिकं घाताङ्कं विधीयमानं सद्यदङ्कतुल्यं भवति तस्याङ्कस्य तथाविध आधारे स एव घाताऽङ्कः लघुरिक्थं भवति इदमेव कैश्चित्प्रघातमापकशब्देनापि प्रकाश्यते यथा $४^{३}$=६४ अत्र ३, ६४ इत्यस्य ४ आधारे लघुरिक्थम्।

एकद्व्यादयः प्रकृत्यङ्काः दशाधारे १०, १००, १०००, १००००, इत्यादीनां दशगुणिताङ्कानां लघुरिक्थरूपाः यतः $१०^{१}$= १०, $१०^{२}$=१००, $१०^{३}$=१००० एवम्।

उ. १ पञ्चविंशत्याधारे .००८ इत्यस्य लघुरिक्थं किम्? कल्प्यतामत्र लघुरिक्थम्=य तदा

$$२५^{य}=.००८=\frac{८}{१०००}=\frac{१}{१२५}=\frac{१}{५^{३}}=५^{-३}$$

$२५^{य}=(५^{२})^{य}=५^{२य}=५^{-३}$ अतोऽत्र घातमूलसमक्रियया

$$२य=-३ \therefore य=-\frac{३}{२}=-१.५ \text{ उत्तरम्}$$

अ आधारे न इत्यस्य लघुरिक्थं साधारणतया $ल_{अ}न$ एवं लिख्यते

अतः यदि $अ^{य}$=न, तदा य=$^{ल}अ^{न}$ आभ्यामेव समीकरणाभ्यामिदं स्फुटं यत् $अ^{^{ल}अ^{न}}$=न

उ२ $ल._{०१}{}^{.००००१}$ अस्य किं मानम् कल्प्यतां $^{ल}{}_{.०१}{}^{.००००१}$ =य

तदा $.०१^{य}$ = .००००१ अतः $(.०१)^{य}=\left(\frac{१}{१०^{२}}\right)^{य}=\frac{१}{१०^{२य}}$

$$=.००००१=\frac{१}{१०^{५}} \therefore १०^{२य}=१०^{५} \text{ वा } २य=५ \text{ वा } य=\frac{५}{२}=२.५$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्र. ७३ यदि निर्दिष्टाधारस्थितमिदं लघुरिक्थमित्येतज्ज्ञायते तदा सुलभार्थमाधारनाम त्यज्यते अतो गणितक्रियायां सुगमार्थं प्रायो दशाधारो गृह्यते अतोऽत्र $ल_{१०}{}^{२}$, $ल_{१०}{}^{३}$ ...इत्यादि सूचनार्थं प्रायः ल२, ल३ इत्येव लिख्यते।

दशाधारस्थितं लघुरिक्थं सार्वत्रिकलघुरिक्थमित्येव प्रसिद्धमस्ति, इयं रीतिश्च यूरपदेशे नेपिअरनामकगणकस्य बुद्धेः प्रादुर्भूता तथा तत्सामयिकेन तन्मित्रेण ब्रिग्जनामकगणकेन प्रवर्त्तिता जाता। अनेन गणितेन गणितसंसारे गुणनभजनवर्गमूलाद्यानयने परमसौलभ्यं जातम्।

तत्रादौ विश्वव्यापका लघुरिक्थसिद्धान्ताः प्रदर्श्यन्ते–

(क) रूपस्य लघुरिक्थं शून्यं भवति यतः $अ^{०}=१$ तेन अ इत्यस्य यथेष्टे माने कल्पिते ल१=० अत्र यः कोऽप्याधारो भवतु फलमेतदेव।

(ख) आधारस्य लघुरिक्थं रूपतुल्यमेव

यतः $अ^{१}=अ$ अतः $^{ल}अ^{अ}=१$

(ग) गुण्यगुणकघातरूपस्य गुणनफलस्य लघुरिक्थं गुण्यगुणकयोर्लघुरिक्थयोर्योगेन तुल्यम्। कल्प्यतां मन=गुणनफलम्, अ आधारस्तथा

कल्प्यताम् $^{य=ल}अ^{स,}\ ^{र=ल}अ^{न}$ तदा $अ^{य}=म$, $अ^{र}=न$

गुणनफलं म $न=अ^{य}\times अ^{र}=अ^{य+र}$ अतः परिभाषाबलेन $लअ^{नम}=$ $य+र=ल_{अ}म+{}^{ल}अ^{न}$ इति

एवमेव $^{ल}अ^{म\ न\ प}={}^{ल}अ^{म}+{}^{ल}अ^{न}+{}^{ल}अ^{प}$ इत्यादि

उदा. ल=४२=ल (२x३x७) =ल२+ल३+ल७

(घ) भिन्नाङ्कस्य लघुरिक्थं भाज्यभाजकयोर्लघुरिक्थयोरन्तरेण समम्

कल्प्यतां $\frac{म}{न}$ भिन्नाङ्कस्तथा कल्प्यतां $य={}^{ल}अ^{म}$, $र={}^{ल}अ^{न}$

अतः $अ^{य}=म$, $अ^{र}=न$ अतः भिन्नं $\frac{म}{न}=\frac{अ^{य}}{अ^{र}}=अ^{य-र}$,

अतः परिभाषाबलेन $ल_{अ}न^{म}=य-र={}^{ल}अ^{म}-{}^{ल}अ^{न}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

उदा. $ल\left(२\frac{१}{७}\right) = ल\frac{१५}{७}$ ल१५-ल७

=ल (३x५)-ल७=ल३+ल५-ल७

(ङ) घाताङ्कविशिष्टस्याङ्कस्य लघुरिक्थङ्घाताङ्कगुणिताऽधारलघुरिक्थेन समम् $ल_{अ}$ ($म^{प}$) यद्यपेक्षितं तदा कल्प्यते य=$ल_{अ}$ म अतः $अ^{य}$=म

तथा $म^{प}=(अ^{य})^{प}=अ^{यप}$ अतः परिभाषाबलेन

$ल_{अ}$ (मप)=प य, वा, $ल_{अ}$ (मप) =प$ल_{अ}$म

एवमेव लअ ($म^{\frac{१}{२}}$) = $\frac{१}{२}$ $ल_{अ}$म

आभ्य उपपत्तिभ्यो निर्गलितार्थाः–

१) गुणनफलस्य लघुरिक्थं गुण्यगुणकयोर्लघुरिक्थयोर्योगेन तुल्यम्।

(२) भिन्नाङ्कस्य लघुरिक्थं भाजकलघुरिक्थरहितेन भाज्यलघुरिक्थेन तुल्यम्।

(३) प घाताङ्कविशिष्टाङ्कस्य लघुरिक्थं प गुणितेन निर्दिष्टाङ्कलघुरिक्थेन तुल्यम्।

(४) एवम् र मूलाङ्कविशिष्टाङ्कस्य लघुरिक्थं र विभक्तेन निर्दिष्टाङ्कलघुरिक्थेन तुल्यम्। अत एभिः सिद्धान्तैः गुणनभजनकार्यं योगवियोगकार्यादेव संपद्यते तथा घातमूलकार्यं च गुणनभजनकार्यादेव कर्त्तुं शक्यते।

उदा. $ल\frac{अ^{५}\sqrt{व}}{\sqrt[३]{क^{२}}}$ लअ, लव, लक इत्यादि रूप एव प्रदर्श्यताम्

$$ल\frac{अ^{५}\sqrt{व}}{\sqrt[३]{क^{२}}} = ल\,(अ^{५}\sqrt{व}) - ल\sqrt[३]{क२}$$

$$=ल\,अ^{५} + ल\sqrt{व} - \frac{२}{३}\,लक$$

$$=५लअ + \frac{१}{२}\,लव - \frac{२}{३}\,लक$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(छ) $_{१०}$य=न अस्मात्समीकरणादिदं स्पष्टं यत्सार्वत्रिकलघुरिक्थानि साधारणतया न पूर्णाङ्कात्मकानि न धनात्मकानि च कुत्रचिदव-स्थायाम्–

अत्रोदाहरणार्थं ३१५४ > $१०^{३}$ तथा < $१०^{४}$

अतः ल ३१५४=३+भिन्नाङ्कः

एवमेव .०६ > $१०^{-२}$ तथा < $१०^{-३}$

अतः ल .०६ = - २ + भिन्नाङ्कः

(ज) सर्वत्र लघुरिक्थे "पूर्णांशस्य पूर्णा संज्ञा अपूर्णाङ्कस्य चापूर्णा संज्ञा क्रियते

(झ) कस्याप्यङ्कस्य दशाधारस्थलघुरिक्थस्य पूर्णापूर्णौ भागौ अङ्कदर्शनमात्रेणैव परीक्षया ज्ञातुं शक्यौ तत्परीक्षारीतिश्च यथा–

अत्रेदं स्फुटं यत् स्थानद्वयात्मकः कोऽप्यङ्को $१०^{१}$ तथा $१०^{२}$ अनयोर्मध्य एव तिष्ठति, एवमेव त्रिस्थानीयाङ्को १० तथा $१०^{३}$ अनयोर्मध्ये भवति एवम्।

अतः न स्थानीयाङ्कः $१०^{न-१}$ तथा $१०^{न}$ अनयोर्मध्ये भवति कल्प्यतां म इष्टोऽङ्कः यस्य पूर्णभागः न स्थानात्मकस्तदा म= $_{१०}$(म-१)+भि।

अतः ल म = न - १+ भिन्नाङ्क

अतो लघुरिक्थे गृहीते पूर्णा लब्धिः न-१ अर्थात् रूपादधिकस्य कस्याप्यङ्कस्य लघुरिक्थग्रहणे पूर्णा लब्धिः रूपविहीनेन स्थानाङ्केन तुल्या धनात्मिका च भवति।

उ, ल ३१४, ल ८७•२६३, ल २•७८, ल ३५०० एतेषां पूर्णा लब्धयः २, १, ०, ३, भवन्ति

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्र.७४ दशमलवरूपे स्थितस्य भिन्नाङ्कस्य पूर्णभागनिर्णयाय प्रयत्नः–

यत्र दशमलवे दशमलवविन्दोः पश्चादेकमेव शून्यं यथा .०३२४ अत्रायम् .०१ अस्मादधिकः१ अस्मच्चाल्पः अतोऽयम् $१०^{-२}$ तथा $१०^{-१}$ अनयोर्मध्ये तिष्ठति। यत्र दशमलवविन्दोः परं शून्यद्वयं स च $१०^{-३}$ तथा $१०^{-२}$ अनयोर्मध्ये तिष्ठति एवमग्रे अतो यत्र दशमलवे दशमलवविन्दोः परं न तुल्यानि शून्यानि तत्र तादृशो दशमलवः $१०^{-(न+१)}$ तथा $१०^{-न}$ अनयोर्मध्ये भवति कल्प्यतां ड दशमलवः यत्र न मितानि शून्यानि तदा

$$ड=१०^{-(न+१)+\text{भिन्नसं.}}, \therefore लड=-(न+१)+\text{भि सं.}$$

अतः पूर्णमानम् -(न+१) अर्थात् दशमलवभिन्नस्यपूर्णं लघुरिक्थं रूपाधिकशून्यसम ऋणात्मकश्च अत्र शून्यं दशमलवविन्दोरव्यवहितपरत्वे स्थितमवगम्यम्।

प्र.७५ दशाधारे १ अस्मात्प्रभृति २००००० एतदङ्कपर्यन्तस्य लघुरिक्थं सारणीस्थमुपलभ्यते बहुत्र सारण्यां दशमलवस्य मानं सप्तस्थानपर्यन्तम्। दशाधारकल्पनायाः विशेषतः प्रयोजनद्वयं वर्त्तते।

(१) प्रथमं तु अत्राधारे पूर्णभागनिर्णयः सुखेन भवति अतः केवलमपूर्णभागज्ञानाय सारण्याः प्रयोजनं भवति।

(२) लघुरिक्थज्ञानाय येषामङ्कानां स्थानाङ्कानि समानि तेषामपूर्णभागोऽपि स एव अतः पूर्णभागज्ञानाय सौकर्यं एतत् स्पष्टतया अग्रे प्रतिपाद्यते-

कल्प्यतां न काचित्संख्या, अतः दशसंख्यायाः केनचिद्घातेन गुणने भजनेऽपि कृते प्रकृते विकाराभावात् केवलं दशमलवविन्दोः परिवर्त्तनं भवति अतः $न\times१०^{प}$, तथा $न\times१०^{फ}$ यत्र प, फ पूर्णसंख्ये

$$\text{इदानीं } ल(न\times१०^{प}) = लन+पल१० = लन+प \ldots(१)$$

$$\text{पुनः } ल(न\div१०^{फ}) = लन-फल१० = लन-फ \ldots(२)$$

(१) अत्र न इत्यस्य लघुरिक्थे काचित्संख्या युक्तास्ति।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(२) अत्र तु काचित्संख्या विहीनास्ति अर्थात् दशमलवभागस्यापूर्णेभागे न किंचिदन्तरमापतति।

अत्र तथा पूर्वोक्तप्रक्रमेषु चापूर्णभागस्य धनत्वमेव कल्पितम् अत्र सर्वथा तथा कार्यं क्रियते येनापूर्णभागस्य धनत्वं न विनष्टं भवति अतः सारणीतः यदा कस्याप्यङ्कस्यापूर्णो भागो गृह्यते तदा पूर्णभाग एव पूर्वरीत्या धनचिह्नम् ऋणचिह्नं वा दीयते।

ऋणलघुरिक्थस्य स्थितौ ऋणचिह्नं पूर्णभागस्यैवोपरि स्थाप्यते नहि लघुरिक्थात्पूर्वम् ऋणचिह्नं स्थाप्यते येन केवलं पूर्णभागस्यैव ऋणत्वबोधो भवति यथा $\bar{४}.३०१०३$, एषः .०००२ अस्य लघुरिक्थम्=-४+.३०१०३ एतत्-४.३०१०३, अस्माद्भिन्नं यतोऽत्र स्वरूपे पूर्णापूर्णभागौ द्वावपि ऋणात्मकौ। यत्र खलु अपूर्णभागे ऋणत्वं भवेत्तत्रापि युक्त्या तस्य भागस्य धनत्वं करणीयं यथा-३.६९८९७ अत्र सर्वम् ऋणात्मकं तेन -३.६९८९७=-३.६९८९७+१-१=४+(१-.६९८९७)=$\bar{४}$.३०१०३.

उ$_१$.०००२४३२ अत्र लघुरिक्थमानेयम्।

सारण्यामिदं दृश्यते यत् ३८५९६३६ ल २४३२ अस्याः अपूर्णभागः (अत्र दशमलवविन्दुः पूर्णभागश्च न गृहीतः) तथा पूर्वरीत्या निर्दिष्टाङ्कलघुरिक्थस्य पूर्णभागः -४ ∴ ल०००२४३२=$\bar{४}$.३८५९६३६

उ$_२$.०००७ अत्र घनमूलमपेक्षितम्, यदि ल७=•८४५०९८०.
तथा ल ८८७९०४=५.९४८३६६०

कल्प्यतामभीष्टं मूलं=य, तदा

$$लय= \frac{१}{३} ल (.०००७) = \frac{१}{३} (\bar{४}.८४५०९८०) =$$
$$\frac{१}{३} (\bar{६}+२•८४५०९८०),$$

अर्थात् ल य २.९४८३६६०;

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

परन्तु ल ८८७९०४ = ५.९४८३६०, ∴ य = .०८८७९०४

५ अस्य तथास्य घाताङ्कस्य लघुरिक्थं सुगमेनैवावबुद्ध्यते ल २

इत्यस्य ज्ञानात् यथा ल५=ल $\frac{१०}{२}$ =ल १०-ल २=१-ल २

उ$_३$ ३२४^५$\sqrt{१२५}$ अत्र लघुरिक्थमानं किं यदि

ल२= .३०१०३००, ल३= .४७७१२१३

यतः ल $\frac{१}{अ}$ = - लअ, अतोऽभीष्टं मानम्= -ल३२४^५ $\sqrt{१२५}$

मानम् = -ल (३२४^५$\sqrt{१२५}$=)	
-ल (२x३^{४}x५$^{\frac{३}{५}}$)	२ ल २=.६०२०६००
=-(२ल२+४ल३+ $\frac{३}{५}$ ल५)	४ ल ३=१.९०८४८५२
=-२.९२९९२७२	$\frac{६}{१०}$ ल ५=.४१९३८२०
=$\overline{३}$.०७००७२८	योगः=२.९२९९२७२

(२७) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

निम्नलिखिताङ्कानां लघुरिक्थं किम्?

[१] १०२४, ८१, .१२५, .०१, १००, २, $\sqrt{३}$, ४. [२] एतेषां पूर्णभागाः के ३२५, १६०३, २४००, १००००, १९ आधाराश्च ३, ११, ७ ९, २१. [३] ३.२६, ५२३.१, .०३, -०००२, ३००० .१, .१. [४] यदि ल२=.३०१०३००, ल३=.४७७१२१३, ल७=.८४५०९८०, निम्नलिखितानां मानानि साध्यानि ल ७६८. [५] ल २३५२, [६] ल ३५.२८ [७] ल $\sqrt{६८०४}$ [८] ल$\sqrt[५]{.००१६२}$ [९] ल कोज्या६०° [१०] ल ज्या^{३}६०°. [११] ल^३ $\sqrt{छ'x४५°}$

[१२] २ ल$\frac{१५}{८}$-ल $\frac{२५}{१६२}$ + ३ ल $\frac{४}{९}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

[१३] ७ इत्यस्य सप्तमूलं ज्ञेयं $\sqrt[7]{7}$. यदि ल १.३२०४६९
= .१२०७२८३

[१४] ०००० १७६४ अस्य घनमूलं किं यदि ल २६०३१५
=५.४१५४९९५

कल्प्यते काचित्सारिणी लघुरिक्थस्य निर्दिष्टाधारेऽस्ति तदाऽन्याधारे तस्याः परिवर्त्तनम्।

प्र.७५ कल्प्यते लघुरिक्थम् अ आधारे तदा व आधारे अस्य परिवर्त्तनमिष्टम्।

कल्प्यते न काचित्संख्या ∴ $ल_व न$ अभीष्टम्।

कल्प्यते $व^र = न$, येन $र = ल_व न$ ∴ $ल_अ (व^र) = ल_अ न$,

अर्थात् र $ल_अ व = ल_अ न$; ∴ $र = \frac{१}{ल_अ व} \times ल_अ न$,

वा, $ल_व न = \frac{१}{ल_अ व} \times ल_अ न$ ...(१)

इदानीं यतः न तथा व विदितौ, तेन $ल_अ न$ तथा $ल_अ व$ सारिणीत उपलभ्यते अतः $ल_व न$ ज्ञातं भवति।

अत्रेदं स्पष्टं यद् अ आधारस्य व आधारे परिवर्त्तनाय केवलं $\frac{१}{ल_अ व}$, अनेन गुण्यते, इयं स्थिरसंख्या यात्र सारिणीत उपलभ्यते, अतोऽस्याः संज्ञा मोडुलस स्थिर इति

यदि (१) अत्र समीकरणे न स्थाने अ स्थाप्यते तदा

$ल_व अ = \frac{१}{ल_अ व} \times ल_अ अ = \frac{१}{ल_अ व}$, ∴ $१ = ल_व अ \times ल_अ व$

पाटीगणितगणिते लघुरिक्थस्यातीवप्रयोजनमिति निम्नलिखितान्युदाहरणानि स्पष्टीकुर्वन्ति तद्यथा–

उ.१ यदि ल२=.३०१०३०० तथा ल ४८४४५४४=
६.६८५२५३०.. तदा $(६.४)^{\frac{१}{१०}} \times (४\sqrt{.२५६})^३$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$\div \sqrt{८०}$. अत्र किं मानम्.

कल्प्यते मानं=य तदा लय

$$= \frac{१}{१०}\,\text{ल}\,\frac{६४}{१०} + \frac{३}{४}\,\text{ल}\,\frac{२५६}{१०००} - \frac{१}{२}\,\text{ल}\,८०$$

$$= \frac{१}{१०}\,(\text{ल}२^{६} - १) + \frac{३}{४}\,(\text{ल}२^{८} - ३) - \frac{१}{२}\,(\text{ल}२^{३} + १)$$

$$= \left(\frac{६}{१०} + ६ - \frac{३}{२}\right)\text{ल}२ - \left(\frac{१}{१०} + \frac{९}{४} + \frac{१}{२}\right)$$

$$= \left(५ + \frac{१}{१०}\right)\text{ल}२ - २\frac{१७}{२०}$$

$$= १.५०५१५०० + .०३०१०३० - २.८५$$

एवं ल य = $\bar{२}$.६८५२५३०.

परन्तु ल ४८४४५४४=६.६८५२५३०,

$\therefore$ य=.०४८४४५४४

उ.२ $(.०५०४)^{१०}$, अत्र दशमलवविन्दु तथा प्रथमस्थानाङ्कयोर्मध्ये कति मितानि शून्यानि? यत्र ल२=.३०१, ल३=.४७७, ल७=.८४५

कल्प्यतां पक्षः=इ तदा लइ=१० ल $\frac{५०४}{१००००}$

$$= १० \,(\text{ल}\,५०४ - ४)$$

$$= १० \,\{\text{ल}\,(२^{३} \times ३^{२} \times ७) - ४\}$$

$$= १० \,(३\text{ल}२ + २\,\text{ल}३ + \text{ल}७ - ४)$$

$$= १० \,(२.७०२ - ४) = १० \,(\bar{२}.७०२)$$

$$= \bar{२}\bar{०} + ७.०२ = \bar{१}\bar{३}.०२$$

३ल२=.९०३
२ल३=.९५४
ल७=.८४५
―――――
२.७०२

$\therefore$ १२ शून्यानि, ७३ प्र. बलात्

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्र. ७६ घातमापकस्य समीकरणम्

यत्र समीकरणे घातादिकमवशिष्टं तत्र लघुरिक्थसाहाय्येनोत्तरं सुलभेन भवति तद्यथा

उ.१ $८^{५-३य}=१२^{४-२य}$ अत्र य इत्यस्य किं मानं यदा ल २=.३०१०३ तथा ल ३=.४७७१२

अत्र निर्दिष्टसमीकरणे पक्षयोर्लघुरिक्थग्रहणेन

(५-३ य) ल ८=(४-२ य) ल १२,

∴ ३ (५-३ य) ल २=(४-२ य) (२ ल २+ल ३),

∴ १५ ल २-८ ल २-४ ल ३= य (९ ल २-४ ल २-२ ल ३),

$$\therefore य=\frac{७ ल २-४ ल ३}{५ ल २-२ ल ३}=\frac{.१९८७३}{.५५०९१}$$

एवम् य= .३६ संभवतः

७ ल २= २.१०७२१
४ ल ३= १.९०८४८
.१९८७३

५ ल २= १.५०५१५
२ ल ३= .९५४२४
.५५०९१

५५०९१) १९८७३० (३६
१६५२७३
३३४५७०

उदा.२ यदि ल २= .३०१०३ तदा $२^{य}.५^{र}=१, ५^{य+१}.२^{र}=२$ अत्र य, र मान के?

पक्षयोर्लघुरिक्थे गृहीते

य ल २+र ल ५=०, (य+१) ल ५+र ल २=ल २ स्वल्पार्थं कल्प्यते ल २=अ, ल ५=व

तदा अ य+व र=०, तथा व (य+१)+अ र=अ, वा व य+ अ र =अ-व, र इत्यस्यापगमे य ($अ^{२}-व^{२}$) =-व (अ-व),

$$\therefore य=-\frac{व}{अ+व}=-\frac{ल५}{ल२+ल५}=-\frac{ल५}{ल१०}=-ल ५=- .६९८९७$$

$$तथा\ र=-\frac{अय}{व}=\frac{अ}{व} ल ५=अ=ल २=.३०१०३$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(२८) निम्नस्थानां प्रश्नानां मानानि साध्यानि–

१. $\left(\frac{१४७\times३७५}{१२६\times१६}\right)^{\frac{२}{३}}$ यत्र ल ९.०७६२२६=.९५७९०५३

२. $\sqrt[३]{३७८}\times\sqrt{१०८}\div\sqrt[६]{१००८}\times\sqrt[३]{४८६}$;

यत्र ल ३०१८२४=५.४७९७५३६

३. $(१०८०)^{\frac{१}{२}}\times(.२४)^{\frac{३}{५}}\times ८१०$,

यत्र ल २४६७२६६=६.३९२२१६०

साध्यन्ताम्

४. $२^{य-१} = ५$

५. $३^{य-४} = ७$

६. $५^{१-य} = ६^{य-३}$

७. $५^{य}=२^{-र}$ तथा $५^{२+र}=२^{२-य}$

८. $२^{य}=३^{र}$ तथा $२^{र+१} = ३^{य-१}$

९. यदि ल २८=अ, ल २१=व, ल २५=क,
तदा ल २७ तथा ल २२४ अनयोर्माने अ, व, क रूपे प्रदेये।

१०. यदि ल २४२=अ, ल ८०=व, ल ४५=क
तदा ल ३६, ल ६६ अनयोर्माने अ, व, क रूपे के?

एकादशाध्यायः

प्र.७७ लघुरिक्थसाहाय्येन त्रिभुजसाधनम्।

इतः पूर्वं भुजस्य कोणस्य च सम्बन्धेन त्रिभुजसाधनं जातं परञ्च तत्र महती गणना सा च विहातुं योग्या। यदि लघुरिक्थसम्बन्धेन तदेव गणितं क्रियते तदातीवसौलभ्यम्।

अत्र प्रकरणे लघुरिक्थसम्बन्धेनैव त्रिभुजसाधनं क्रियते–

तत्र प्रथमं भुजसम्बन्धेन कोणार्धज्यादिज्ञानं क्रियते।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

इदं तु सिद्धं यत् $२ \text{ ज्या}^२ \frac{\text{आ}}{२} = १ - \text{कोज्याआ} = १ - \frac{\text{व}^२ - \text{क} + \text{अ}^२}{२\text{वक}} =$

$$= \frac{२\text{वक} - \text{व}^२ - \text{क}^२ + \text{अ}^२}{२ \text{ वक}} = \frac{\text{अ}^२ - (\text{व}^२ - २\text{वंक} + \text{क}^२)}{२ \text{ वक}}$$

$$= \frac{\text{अ}^२ - (\text{व} - \text{क})^२}{२\text{वक}} = \frac{(\text{अ} + \text{व} - \text{क})(\text{अ} - \text{व} + \text{क})}{२\text{वक}}$$

कल्प्यतां अ+व+क=२स तदा अ+व-क=२स-२क=२(स-क) तथा अ-व+क=२स-२व=२ (स-व)।

$$\therefore २ \text{ ज्या} \frac{\text{आ}}{२} = \frac{४(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{व})}{२\text{वक}} = \frac{२(\text{स}-\text{व})(\text{स}-\text{क})}{\text{वक}}$$

$$\therefore \text{ज्या} \frac{\text{आ}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{व})(\text{स}-\text{क})}{\text{वक}}}$$

पुनः $२\text{कोज्या} \frac{\text{आ}}{२} = १ + \text{कोज्याआ} = १ + \frac{\text{व}^२ + \text{क}^२ - \text{अ}^२}{२\text{वक}}$

$$= \frac{(\text{व}+\text{क})^२ - \text{अ}^२}{२\text{वक}} = \frac{(\text{व}+\text{क}+\text{अ})(\text{व}+\text{क}-\text{अ})}{२\text{वक}}$$

$$\therefore २\text{कोज्या}^२ \frac{\text{आ}}{२} = \frac{४\text{स}(\text{स}-\text{अ})}{२\text{वक}} = \frac{२\text{स}(\text{स}-\text{अ})}{\text{वक}};$$

$$\therefore \text{कोज्या} \frac{\text{आ}}{२} = \sqrt{\frac{\text{स}(\text{स}-\text{अ})}{\text{वक}}}$$

$$\text{एवं स्प} \frac{\text{आ}}{२} = \text{ज्या} \frac{\text{आ}}{२} \div \text{कोज्या} \frac{\text{आ}}{२}$$

$$= \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{व})(\text{स}-\text{क})}{\text{वक}} \times \frac{\text{वक}}{\text{स}(\text{स}-\text{अ})}} \therefore \text{स्प} \frac{\text{आ}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{व})(\text{स}-\text{क})}{\text{स}(\text{स}-\text{अ})}}$$

अनयैव युक्त्या

$$\text{ज्या} \frac{\text{वा}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{अ})}{\text{क} \cdot \text{अ}}}, \text{ ज्या} \frac{\text{का}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{ब})}{\text{अव}}}$$

$$\text{कोज्या} \frac{\text{वा}}{२} = \sqrt{\frac{\text{स}(\text{स}-\text{व})}{\text{कअ}}}, \text{ कोज्या} \frac{\text{का}}{२} = \sqrt{\frac{\text{स}(\text{स}-\text{व})}{\text{अव}}}$$

$$\text{स्प} \frac{\text{वा}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{अ})}{\text{स}(\text{स}-\text{व})}}, \text{ स्प} \frac{\text{का}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{व})}{\text{स}(\text{स}-\text{क})}}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्रत्येकस्मिन् स्वरूपे मूलं धनात्मकमेव ग्राह्यं यतः प्रत्येककोणार्ध-मानं ९०° तः अल्पमेव भवति अतः सर्वाणि फलानि धनात्मकानि।

प्र.७८ भुजसम्बन्धेन कोणज्यासाधनम्

$$ज्याआ = २ज्या\frac{आ}{२} कोज्या\frac{आ}{२} = २\sqrt{\frac{(स-व)(स-क)}{वक} \times \frac{स(स-अ)}{वक}};$$

$$\therefore ज्याआ = \frac{२}{वक}\sqrt{स(स-अ)(स-व)(स-क)}$$

प्रकारान्तरेण वा एष सिद्धान्तः साध्यते–

$$ज्या^२आ = १-कोज्या^२आ = (१+कोज्याआ)(१-कोज्याआ)$$

$$= \left(१+\frac{व^२+क^२-अ^२}{२वक}\right)\left(१-\frac{व^२+क^२-अ^२}{२वक}\right)$$

$$= \frac{(व+क)^२-अ^२}{२वक} \times \frac{अ^२-(व-क)^२}{२वक}$$

$$= \frac{(व+क+अ)(व+क-अ)(अ+व-क)(अ-व+क)}{४व^२क^२}$$

$$= \frac{१६स(स-अ)(स-व)(स-क)}{४व^२क^२}$$

$$\therefore ज्याआ = \frac{२}{वक}\sqrt{स(स-अ)(स-व)(स-क)}$$

अत्र मूलं धनात्मकमेव स्वीकरणीयं यतस्त्रिभुजे कस्यापि कोणस्य ज्या सर्वदा धनात्मिकैव भवति।

(२१) अत्राभ्यासार्थं प्रश्नाः यस्मिन्कस्मिन्नपि त्रिभुजे साध्याः।

१. $व\ कोज्या^२\frac{आ}{२} + अ\ कोज्या^२\frac{वा}{२} = स$

२. $स\ स्प\frac{वा}{२} स्प\frac{का}{२} = स-अ$

३. $\frac{उज्या\ आ}{उज्या\ वा} = \frac{अ(अ+क-व)}{व(व+क-अ)}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

४. $व\ ज्या^2 \frac{आ}{२} + अ\ ज्या^2 \frac{वा}{२} = स-क$

५. $(स-अ)\ स्प\ \frac{आ}{२} = (स-व)\ स्प\ \frac{वा}{२} = (स-क)\ स्प\ \frac{का}{२}$

६. स्प $\frac{वा}{२}$ अस्य मानं किं यदा अ=१०, व=१७, क=२१

साध्येताम्

७. $\frac{१}{अ}\ कोज्या^2 \frac{आ}{२} + \frac{१}{व}\ कोज्या^2 \frac{वा}{२} + \frac{१}{क}\ कोज्या^2 \frac{का}{२} = \frac{स^2}{अवक}$

८. $\frac{व-क}{अ}\ कोज्या^2 \frac{आ}{२} + \frac{क-अ}{व}\ कोज्या^2 \frac{वा}{२} +$

$\frac{अ-व}{क}\ कोज्या^2 \frac{का}{२} = ०$

प्र.७९ भुजत्रयाणां ज्ञानात् त्रिभुजसाधनं यथा

साधितसिद्धान्तेन स्प $\frac{आ}{२} = \sqrt{\frac{(स-व)(स-क)}{स(स-अ)}}$

लस्य $\frac{आ}{२}$ =

$\frac{१}{२} \{ ल(स-व) + ल(स-क) - लस - ल(स-अ) \}$

ततः $\frac{आ}{२}$ ज्ञानं सारिणीतो भवति

एवमेव वा कोणज्ञानं स्प $\frac{वा}{२}$ सिद्धान्तेन भवति ततः १८०° - आ-वा=का प्रदर्शितप्रकारेण। अत्र सारिणीतश्चतुर्णामेवाङ्कानां लघुरिक्थस्यान्वेषणमावश्यकं यथा स, स-अ, स-व, स-क; एतेषाम्। अथ यदि ज्या कोटिज्यातः साधितप्रकारेण गणितं क्रियते तदा षडङ्कानां लघुरिक्थस्य प्रयोजनं सञ्जायते। यथा–

कोज्या $\frac{आ}{२} = \sqrt{\frac{स(स-अ)}{वक}}$ तथा कोज्या $\frac{वा}{२} = \sqrt{\frac{स(स-व)}{कअ}}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

अतोऽत्र स, स-अ, स-व, अ, व, क षडङ्कानां लघुरिक्थस्य प्रयोजनं तदा तत्र स्पर्शरेखा प्रकारस्वीकार एव श्रेयान् परन्तु यदि कस्यापि कोणस्यैव साधनमभीष्टं तदा ज्या, कोटिज्या, स्पर्श रेखादीनां मध्ये कस्याप्येकस्य प्रकारस्य स्वीकारेण कार्यं प्रचलति।

यत्रोदाहरणे लघुरिक्थमानं प्रदत्तं भवति तत्र प्रकारग्रहणे स्वातन्त्र्यं येन निर्दिष्टलघुरिक्थस्य प्रयोगः कृतो भवेत्।

उदा.१ कस्यचित् त्रिभुजस्य भुजाः ३५, ४९, ६३, तदा महत्तम-कोणमानमानीयतां यत्र ल २=.३०१०३००, ल ३=.४७७१२१३ विदितेस्तः तथा ल कोज्या ४७°५३'=९.८२६४९१०, अन्तर ६०" मेतदर्थं=१३९७.

यतो भुजैस्सार्धं कोणानां सम्बन्ध एव भवति तत्र यदि केनाप्यङ्केन भुजान् विभज्य तादृशाः भुजाः स्वीक्रियन्ते तथापि कोणमानसंबन्धे न काचिद्हानिः यथात्रोदाहरणे भुजान् सप्तभिर्विभज्य कल्प्यते अ=५, व=७, क=९ तदात्र का महत्तमः कोणः तथा कोज्या $\frac{\text{का}}{२}$

$$=\sqrt{\frac{\text{स (स-क)}}{\text{अ व}}}=\sqrt{\frac{२१}{२}\times\frac{३}{२}\times\frac{१}{५\times७}}=\sqrt{\frac{९}{२०}};$$

$\therefore$ ल कोज्या $\frac{\text{का}}{२}$ =

$\frac{१}{२}$ (२ ल ३-ल २-१)

२ ल ३ = .९५४२२६
१.३०१०३००
२) १.६५३२१२६
१.८२६६०६३

एवं ल कोज्या $\frac{\text{का}}{२}$ = १.८२६६०६३

ल कोज्या ४७°५३'= १.८२६४९१०

अन्तरम् ११५३

$\therefore$ अनुपाततो हानिः= $\frac{११५३}{१३९७}\times ६०$

= ४९.५"

११५३
६०
१३९७) ६९१८० (४९.५
५५८८
१३३००
१२५७३
७२७०

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$\therefore \frac{\text{का}}{२}$ = ४७° ५२' १०.५" अतो महत्तमं कोणमानम्

= ९५° ४४' २१"

उदा.२ यदि अ=२८३, व=३१७, क=४२८ तदा

कोणमानानि साध्यानि

$$\text{स्प}\frac{\text{आ}}{२}=\sqrt{\frac{(\text{स-व})(\text{स-क})}{\text{स}(\text{स-अ})}}$$

$$=\sqrt{\frac{१९७\times८६}{५१४\times२३१}}$$

$$\therefore \text{ल}\frac{\text{अ}}{२}\text{स्प} =$$

$$\frac{१}{२}(\text{ल } १९७+\text{ल } ८६-\text{ल } ५१४-\text{ल } २३१)$$

२८३
३१७
४२८
२) १०२८ (
५१४ =स
२३१ =स-अ
१९७=स-व
८६ =स-क

सारिणीतः

ल १९७=२.२९४४६६२
ल ८६=१.९३४४९८५
४.२२८९६४७
५.०७४५७५१
२)१.१५४३८९६

ल ५१४=२.७१०९६३१
ल २३१=२.३६३६१२०
५.०७४५७५१

ल स्प $\frac{\text{आ}}{२}$ = १.५७७१९४८

ल स्प २०°४१'= १.५७६९५८५

अन्तरम्= २३६३

परन्तु ६०" अन्तरम्= ३८२२

$\therefore$ अनुपातात्मिका वृद्धिः=

$\frac{२३६३}{३८२२}\times ६०" = ३७.१"$

$\therefore \frac{\text{आ}}{२}$ = २०° ४१' ३७.१"

तथा आ = ४१° २३' १४"

२३६३
६०
३८२२)१४१७८०(३७.१
११४६६
२७१२०
२६७५४
३६६०

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{पुनः स्प}\ \frac{\text{वा}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{स-क})(\text{स-अ})}{\text{स}(\text{स-व})}} = \sqrt{\frac{८६\times२३१}{५१४\times१९७}};$$

$$\therefore \text{ल स्प}\ \frac{\text{वा}}{२} = \frac{१}{२}\ (\text{ल}८६+\text{ल}\ २३१-\text{ल}\ ५१४-\text{ल}\ १९७)$$

ल ८६=१.९३४४९८५
ल २३१=२.३६३६१२०
४.२९८११०५

ल ५१४=२.७१०९६३१
ल १९७=२.२९४४६६२
५.००५४२९३

५.००५४२९३
२)१.२९२६८१२

$$\text{ल स्प}\ \frac{\text{वा}}{२} = १.६४६३४०६$$

$$\text{ल स्प}\ २३^{\circ}५३' = \frac{१.६४६१९८८}{१४१८}$$

परन्तु ६०" अ = ३४१२

$$\therefore \text{अ वृद्धिः} = \frac{१४१८\times६०''}{३४१२} = २४.९''$$

१४१८
६०
३४१२)८५०८०(२४.९
६८२४
१६८४०
१३६४८
३१९२०

$$\therefore \frac{\text{वा}}{२} = २३^{\circ}\ ५३'\ २४.९''\ \text{तथा वा} = ४७^{\circ}\ ४६'\ ५०''$$

एवम् आ=४१° २३' १४" वा=४७° ४६' ५०", का=९०° ४९' ५६"

(३०) अभ्यासार्थं प्रश्नाः।

१. कस्मिंश्चित् त्रिभुजे भुजाः ५,८,११, तत्र महत्तमं कोणमानं साध्यताम् यदा ल ७=.८४५०९८०, ल ज्या ५६° ४७' = ९.९२२५२०५, ल ज्या ५६°४८'=९.९२२६०३२.

२. यदि अ=४०, व=५१, क=४३, तदा आ मानं साध्यताम् यदा ल १२८=२.१०७२१००, ल ६०३=२.७८०३१७३, लस्प २४° ४४' १३"=९.६६३४४६४.

३. यदि अ, व, क भुजाः यथा ४:५:६ तदा वा कोणमानं साध्यताम्

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

यदा ल २, ल कोज्या २७° ५३' = ९.९४६४०४०, अन्तरमेक-कलार्थम्=६६९

४. यत्र त्रिभुजे भुजाः ५, ६, ७ तत्र महत्तमं कोणमानं साध्यताम् यदा ल कोज्या ३९° १४'=९.८८९०६४४', १' अन्तर=१०३२ तथा ल ६= ७७८१५१३.

५. यदि अ=३, ब=१.७५, क=२.७५ तदा का कोणमानं साध्यतां यदा ल२, ल स्प ३२° १८' = ९.८००८३६५, १अ=२७९६

६. यत्र त्रिभुजे भुजाः २४, २२, १४ तत्र लघुतमं कोणमानं किं यदा १७° ३३' =९.५०००४२ तथा १' अ=४३९

७. यत्र त्रिभुजे भुजाः ४,१०,११ तत्र महत्तमं कोणमानं साध्यतां यदा ल२, ल३, तथा लकोज्या ४६°४७'=९.८३५५३७८ अ१', =१३४५.

८. यदि त्रिभुजे अःवः क भुजाः=१५:१३:१४ तदा कोणान् साधय? प्रदत्ताः ल२, ल३, ल७, लस्प २६° ३३' =९.६९८६८४७ अ१'= ३१५९ लस्प २९° ४४' =९.७५६७५८७, अ१',=२९३३.

प्र.७९ भुजयोस्तदन्तर्गतकोणस्य च ज्ञानात् त्रिभुजफलं साध्यते।

कल्प्यतां व, क, आ एते अवयवाः ज्ञातास्तथा कल्प्यते च=

$$\frac{\text{ज्यावा}}{\text{व}} = \frac{\text{ज्या का}}{\text{क}}, \text{ तदा } \frac{\text{ज्यावा-ज्याका}}{\text{ज्यावा+ज्याका}} = \frac{\text{चव-चक}}{\text{चव+चक}} =$$

$$\frac{\text{व-क}}{\text{व+क}} ; \therefore \frac{२ \text{ कोज्या } \frac{\text{वा+का}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{वा-का}}{२}}{२ \text{ ज्या} \frac{\text{वा+का}}{२} \text{ कोज्या} \frac{\text{वा-का}}{२}} = \frac{\text{व-क}}{\text{व+क}} ;$$

$$\therefore \frac{\text{स्प} \frac{\text{वा-का}}{२}}{\text{स्प} \frac{\text{वा+का}}{२}} = \frac{\text{व-क}}{\text{व+क}} ; \therefore \text{ स्प } \frac{\text{वा-का}}{२} =$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$\frac{व-क}{व+क}$ स्प $\frac{वा+का}{२} = \frac{व-क}{व+क}$ कोस्प $\frac{आ}{२}$ यतः $\frac{वा+का}{२} = ९० - \frac{आ}{२}$

$\therefore$ ल स्प $\frac{वा-का}{२}$ = ल (व-क) − ल (व+क) + ल कोस्प $\frac{आ}{२}$

अस्मात्समीकरणात् $\frac{वा-का}{२}$ साधयितुं शक्यते तथाऽत्र $\frac{वा+का}{२}$

$= ९०^\circ - \frac{आ}{२}$ अत इदं ज्ञातम्।

ततः संक्रमणेन वा, का ज्ञानं सुगमम्।

अ= $\frac{व\ ज्याआ}{ज्यावा}$, $\therefore$ लअ=लव+लज्याआ-लज्यावा,

अस्मात् अ ज्ञानं भवति।

उत्तर-१ यदि अ, व भुजौ ७,३ अनयोः सम्बन्धेन स्तः तथा तदन्तर्गतकाकोणः=६०° तदा आ, वा ज्ञानं क्रियतां यदा ल २=

.३०१०३००, ल३=.४७७१२१३ ल स्प $३४^\circ ४२'$=

९.८४०३७७६, अ१'=२६९९

स्प $\frac{आ-वा}{२} = \frac{अ-व}{अ+व}$ कोस्प $\frac{का}{२} = \frac{७-३}{७+३}$ कोस्प $३०^\circ = \frac{४}{१०}\sqrt{३}$

$\therefore$ ल स्प $\frac{आ-वा}{२}$ = २ल२-१+$\frac{१}{२}$ल३,

$\therefore$ ल स्प $\frac{आ-वा}{२}$ = १.८४०६२०७

ल स्प $३४^\circ ४२'$ = $\frac{१.८४०३७७६}{२४३१}$
अं

$\therefore$ अनु-वृद्धिः = $\frac{२४३१}{२६९९} \times ६०'' = ५४''$

$\therefore \frac{आ-वा}{२} = ३४^\circ ४२' ५४''$

तथा $\frac{आ+वा}{२} = ९०^\circ - \frac{का}{२} = ६०^\circ$

ततः संक्रमणेन आ=$९४^\circ ४२' ५४''$

२ल२=.६०२०६००
$\frac{१}{२}$ल३=.२३८५६०७
८.४०३६२०७

२४३१
६०
२६९९)१४५८६०(५४
१३४९५
१०९१०
१०७९६

वा=$२५^\circ १७' ६''$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

उदा. २ यदि अ=६८१, क=२४३, वा ५०° ४२' तदा सारिणी-साहाय्येन त्रिभुजं साध्यताम्

$$\text{स्प}\frac{\text{आ-का}}{२} = \frac{\text{अ-क}}{\text{अ+क}} \text{कोस्प}\frac{\text{वा}}{२} = \frac{४३८}{९२४} \text{कोस्प } २५° २१'$$

∴ ल स्प $\frac{\text{आ-का}}{२}$ =ल४३८-ल९२४ +ल कोस्प २५°२१'

∵ ल स्प $\frac{\text{आ-का}}{२}$ =.०००२३८३

ल स्प ४५°=.००००००

अ=२३८३

तथा अ ६०"=२५२७

∴ अनु-वृ= $\frac{२३८३}{२५२७}$ X६०"=५७"

∴ $\frac{\text{आ-का}}{२}$ =४५° ०' ५७" तथा

$\frac{\text{आ+का}}{२}$ = ९०°- $\frac{\text{वा}}{२}$ = ६४° ३९'

ल४३८=२.६४१४७४१
लकोस्प२५°२१'= .३२४४३६२
२.९६५९१०३
ल९२४=२.९६५६७२०
.०००२३८३

२३८३
६०
२५२७)१४२९८०(५६.६
१२६३५
१६६३०
१५१६२
१४६८०

ततः संक्रमणेन आ=१०९° ३९' ५७", का=१९° ३८'३"

पुनः व = $\frac{\text{क ज्यावा}}{\text{ज्याका}}$,

∴ लव=लक+ल ज्यावा - ल ज्याका

= ल २४३+ल ज्या ५०°४२' - ल ज्या १९° ३८'३"

∴ ल व = २.७४७९०१२

ल ५५९.६३ =

∴ व = $\frac{२.७४७९०१०}{५५९.६३}$

ल ज्या १९°३८'=१.५२६३३८७
$\frac{३}{६०}$ x३५४०=१७७
ल ज्या ५०°४२"=१.८८८६५१३
ल२४३=२.३८५६०६३
ल ज्या १९°३८'=१.५२६३३८७
२.२७४२५७६
ल ज्या १९°३८'३"=१.५२६३५६४
२.७४७९.१२

एवम् आ=१०९°३९'५७", का=१९°३८'३", व=५५९.६३

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्र.८० सिद्धान्तेन स्प $\frac{\text{वा-का}}{२}=\frac{\text{व-क}}{\text{व+क}}$ कोस्प $\frac{\text{आ}}{२}$, अत्रेदं द्रष्टव्यं यत् यदि व, क, तथा वा-का

ज्ञाता भवन्ति तदा आ कोणस्यापि ज्ञानं भवति अर्थात् यदि द्वौ भुजौ तथा तत्संमुखकोणयोरन्तरं ज्ञातं भवेतदा सर्वथा त्रिभुज्याऽवयवाः ज्ञाता भवन्ति।

(३१) अत्राभ्यासार्थं केचित् प्रश्नाः।

१. यदि अ=९, व=६, का=६०°, तदा आ, वा ज्ञानं क्रियताम् यदि लर, लइ, ल स्प १९° ६'=९.५३९४२८७,
ल स्प १९°७'=९.५३९८३७१

२. यदि १७ अ=७ व, का=६०°, तदा आ, वा ज्ञानं क्रियतां यदि लर, लइ, ल स्प ३५° ४९'=९.८५८३३५७, अ६०"=२६६२

३. यदि क=२१०, अ=११०, वा=३४° ४२'३०" तदा का, आ कोणज्ञानं क्रियताम्। यदि लर, ल को स्प १७° २१'१५"= १०.५०५१५०० ज्ञातास्सन्ति।

४. त्रिभुजस्य द्वौभुजौ ५:३ तदन्तर्गतकोणश्च ६०°३०' तदा शेषकोणज्ञानं क्रियताम् यदा लर, लकोस्प ३०°१५'=१०.२३४२०, लस्प २३°१३'=९.६३२४०, अ १'=३५

५. यदि अ=३२७, क=२५६, वा=५६°२८' तदा आ, का ज्ञानं क्रियताम् ल ७.१=.८५१२५८३, ल ५.८३=.७६५६६८६, लस्प १२°४६'=९.३५५२२६७, लस्य ६१°४६'= १०.२७००७०५, अं १'=५८५९

६. यदि व=४क, आ=६५° तदा वा, का ज्ञानं क्रियताम्- यदा लर, लइ, ल स्प ५७°३०'=१०.१९५८१२७,
ल स्प ४३°१८'=९.९७४२१३३, अं १='२५३१ ज्ञाताः सन्ति

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्र.८० त्रिभुजे कोणयोरेकभुजस्य च ज्ञानात् शेषावयवंज्ञानं, यथा कल्प्यतां ज्ञाताऽवयवाः वा, का, अ, तदा तृतीय कोणमानम् आ=१८० वा-का इति भवति, तथा

व=$\frac{\text{अज्यावा}}{\text{ज्याआ}}$ ∴ लव=लअ+लज्यावा-लज्याआ, ततो व ज्ञानं सुकरम्

एवमेव लक=लअ+लज्याका-लज्याआ अस्मात्समीकरणात् क ज्ञानं भवति

उत्तर यदि व=१०००, आ=४५°, का=६८° १७' ४०" तदा लघुतमभुजज्ञानं क्रियतामत्र ल २=.३०१०३००, ल ७.६९८६=.८८६४११८, अं १=५७, लज्या ६६°४२'=९.९६३०५३८ अ १'=५४४ दत्तास्सन्ति।

वा=१८०°-४५°-६८° १७' ४०"=६६° ४२' २०"

न्यूनतमभुजः=अ=$\frac{\text{व ज्याआ}}{\text{ज्यावा}}=\frac{\text{१००० ज्या ४५°}}{\text{ज्या ६६° ४२' २०"}}$

∴ ल अ=३+ल $\frac{१}{\sqrt{२}}$-

लज्या ६६° ४२' २०"=३ $\frac{१}{२}$ लर-

लज्या ६६° ४२' २०"=३-११३५८६९

लज्या ६६°४२'=
१.९६३०५३८

$\frac{२०}{६०}$ x ५४४=१८१

$\frac{१}{२}$ लर= $\frac{.१५०५१५०}{.११३५८६९}$

∴ लअ =२.८८६४१३१

ल७६९.८६ =$\frac{\text{२.८८६४११८}}{\text{अ \quad १३}}$

अनु-वृद्धिः=$\frac{१३}{५७}$= .२२ ∴ न्यूनतमभुजः=७६९.८६२२

(३२) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

१. यदि वा=६०°१५', का=५४°३०', अ=१०० तदा क ज्ञानं क्रियताम् यदा लज्या ५४°३०'=९.९१०६८६०, ल ८.९६४६१६२=.९५२५३१७, लज्या ६५°१५'=९.९५८१५४३

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

२. यदि आ=५५°, वा=६५°, क=२७० तदा अ मानं किं यदा ल२, ल ३, ल २५५३८=४.४०७१८६९, लज्या ५५°=९.९१३३६४५, ल २५५३९=४.४०७२०३९

३. यदि आ=४५°४१', का=६२°.५', व=१०० तदा क मानमानीयताम्—यदा ल९.२७८८=.९६७४७, लज्या ६२°५'=९.९४६२७, लज्या ७२°१४'=९.९७८७८

प्र.८१ क^२=अ^२+व^२-२ अ व कोज्याका एष प्रकारोऽपि लघुरिक्थस्वरूपे परिणमयितुं योग्यः।

यतः कोज्याका=कोज्या$^२\frac{का}{२}$-ज्या$^२\frac{का}{२}$, तथा १=कोज्या$^२\frac{का}{२}$+ज्या$^२\frac{का}{२}$

$$अत्र\ क^२ = (अ^२+व^२)\left(कोज्या^२\frac{का}{२} + ज्या^२\frac{का}{२}\right)$$

$$- २\ अ\ व\left(कोज्या^२\frac{का}{२} - ज्या^२\frac{का}{२}\right)$$

$$= (अ^२+व^२-२अव)\ कोज्या^२\frac{का}{२}$$

$$+ (अ^२+व^२+२\ अव)\ ज्या^२\ \frac{का}{२}$$

$$= (अ-व)\ कोज्या^२\frac{का}{२} + (अ+व)^२\ ज्या^२\frac{का}{२}$$

$$=(अ-व)^२ कोज्या^२\frac{का}{२}\left\{१+\left(\frac{अ+व}{अ-व}\right)^२ स्प^२\ \frac{का}{२}\right\}$$

कल्प्यतां सहायकोणः इ येन स्प इ= $\frac{अ+व}{अ-व}$ स्प$\frac{का}{२}$,

$$\therefore तदा\ क^२ = (अ-व)^२\ कोज्या^२\frac{का}{२}\ (१+स्प^२\ इ)$$

$$= (अ-व)^२\ कोज्या^२\frac{का}{२}\ छे^२\ इ;$$

$$\therefore क = (अ-व)\ कोज्या\ \frac{का}{२}\ छे\ इ;$$

$$\therefore लक = ल\ (अ-व) + ल\ कोज्या\ \frac{का}{२} + ल\ छे\ इ,$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

यत्र इ कोणज्ञानं निम्नस्थसमीकरणाद्भवति।

$$\text{ल स्प इ} = \text{ल (अ+व)} - \text{ल (अ-व)} + \text{ल स्प}\ \frac{\text{का}}{\text{२}}\ .$$

प्र. ८२ द्वयोर्भुजयोस्तत्संमुखकोणस्यैकस्य च ज्ञानात् त्रिभुजज्ञानं यथा–

कल्प्यतां ज्ञातावयवाः अ, वा, आ,

तदा $\text{ज्यावा} = \frac{\text{व}}{\text{अ}}\ \text{ज्याअ}$; अस्मात् लज्यावा=लव-लअ+लज्याआ;

ततो वा ज्ञानं सुबोधम् तदा का=१८०°–आ-वा

पुनः $\text{क} = \frac{\text{अ ज्याका}}{\text{ज्याआ}}$ ∴ लक=लअ+लज्याका-लज्याआ

यदि अ < व तथा आ कोणो न्यूनकोणस्तदोत्तरं सन्देहास्पदम्। तत्र द्विविधं मानं वा कोणस्य, एकं वा प्रमितं द्वितीयं १८०-वा, एवं का कोणस्य तथा क भुजस्य च द्विविधं मानमायाति।

उत्तर यदि व=६३, क=३६, का=२९° २३'१५" तदा वा कोणमानं किं यदा ल२=.३०१०३००, ल७=.८४५०९८०, लज्या २९°२३'= ९.६९०७७२१, अ १'=२२४३,

ल ज्या ४९°१०'=९.९३३८२२२, अ१'=७५५

$\text{ज्यावा} = \frac{\text{व}}{\text{क}}\ \text{ज्याका} = \frac{\text{६३}}{\text{३६}}\ \text{ज्याका} = \frac{\text{७}}{\text{४}}\ \text{ज्या २९°२३'१५"}$

∴ लज्यावा=ल७-२ल२+लज्या२९°२३'१५";

∴ लज्यावा=१.९३३८६६२

लज्या ५९.१०=१.९३३८२२२

अं= ४४०

∴ अनुपातीयवृद्धिः $\frac{\text{४४०}}{\text{७५५}}$ X६०"=३५";

∴ वा=५९०१०' ३५"

लज्या २९°२३=१-
६९०९०७७.२१५६१

$\frac{\text{१५}}{\text{६०}}$X२३४३=

ल७= $\frac{\text{.८४५०९८०}}{\text{.५३५९२६२}}$

२ल२= $\frac{\text{.६०२०६००}}{\text{१.९३३८६६२}}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

तथा यतः क $<$ व अतः वा कोणस्य द्वितीयं मानं च साधित-कोणोनभार्धांशसमर्थात् वा=१२०° ४९' २५"

(३३) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

१. यदि १४५, व=१७८, वा४१° १०' तदा आ कोणमानं किं यदा ल१७८=२.२५०४२००, ल ज्या ४१° १०'=९.८१८३९१९ ल१४५ =२.१६१३६८०, लज्या ३२° २५' ३५" =९.७२९३३९९

२. यदि क=५, व=४, का=४५° तदा आ, वा माने के यदा ल२, लज्या ३४°२६'=९.७५२५७५०

३. यदि व=८.४, क=१२, वा=३७°३६', तदा आ मानं किं यदा ल७=.८४५०९८०, लज्या ३७°३६'=९.७८५४३३२.
लज्या ६०° ३९'=९.८४०३३८१, अं १'=७११

प्र.८३ $क^२=अ^२+व^२$ एष प्रकारोऽपि लघुरिक्थगणनायामानेतुं योग्यः यथा कल्प्यते $क^२=अ^२+व^२=अ^२\left(१+\frac{व^२}{अ^२}\right)$, यदि कस्यापि कोणस्य स्पर्शरेखायाः ज्ञानं भवेत्तदा तत्कोणज्ञानं सुगमं तेन कल्प्यते $स्पइ=\frac{व}{अ}$

तदा $क^२=अ^२ (१+स्प^२इ)=अ^२छे^२इ$, $\therefore$ क=अछेइ,

$\therefore$ लक=लअ+ल छेइ,

अत्र इ कोणः सहायककोणः कथ्यते तथाऽस्यज्ञानं

ल स्पइ=लव-लअ अस्मात्समीकरणाद् भवति।

अतो यदि किमपि स्वरूपं द्वयोर्वर्गयोगेन तुल्यं तदा तत् लघुरिक्थस्वरूपे परिणमयितुं सुशकम्।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्र.८४ त्रिभुजे यत्र भुजयोस्तदन्तर्गतकोणस्य च ज्ञानमस्ति तत्र प्रथमं शेषकोणज्ञानं विधाय त्रिभुजज्ञानं कृतमिदानीं प्रथमं तृतीयभुजस्यैव ज्ञानं कृत्वा त्रिभुज ज्ञानाय प्रकारो यथा

उ. यदि अ =३, क=१, वा=५३° ७' ४८" तदा व ज्ञानं कथम्

लर =३०१०३००, लर.५२९८=.४०३०८६२, अ१

= १७२, ल कोज्या २६०° ३३' ५४"

= ९.९५१५४५२, ल स्प २६° ३३' ५४"

= ९.६९८९७००

कल्प्यते $व^2= क^2+अ^2-२\ क\ अ\ कोज्या\ वा$

$$= (अ^2+क^2)\ \ कोज्या^2\frac{वा}{२} + ज्या^2\frac{वा}{२}$$

$$- २अ\ क\left(कोज्या^2\frac{वा}{२} - ज्या^2\frac{वा}{२}\right)$$

$$= (अ-क)^2\ कोज्या^2\frac{वा}{२} + (अ-क)^2\ स्प^2\frac{वा}{२}$$

$$= (अ-क)^2\ कोज्या^2\frac{वा}{२}\left\{१+\left(\frac{अ+क}{अ=क}\right)^2 स्प^2\frac{वा}{२}\right\}$$

$$= (अ-क)^2\ कोज्या^2\frac{वा}{२}\ (१+स्प^2\ इ) \ldots (१)$$

यत्र $स्पइ = \frac{अ+क}{अ-क} = \frac{वा}{२}$ २स्प २६° ३३' ५४",

∴ ल स्पइ = ल २+ल स्प २६° ३३' ५४"

= .३०१०३००+१.६९८९७००=०

यस्मात् स्पइ= १, तथा इ=४५°

∴ (१) अस्मात् व=(अ-क) कोज्या $\frac{वा}{२}$ छेइ=२छे४५° कोज्या $\frac{वा}{२}$

= $२\sqrt{२}$ कोज्या २६° ३३' ५४",

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$\therefore$ ल व = ल२+ $\frac{१}{२}$ ल२

+ ल कोज्या २६° ३३' ५४"

$\therefore$ लव=.४०३०९०२

ल २.५२९८=.४०३०८६२

अं ४०

परन्तु अं १=१७२ $\therefore$

$\therefore$ अ-वृ= $\frac{४०}{१७२}=\frac{१०}{४३}$=.२३

अतस्तृतीयभुजः = २.५२९८२३

ल२=.३०१०३००

$\frac{१}{२}$ल२=.१५०५१५०

लकोज्या २६° ३३' ५४"

= १.९५१५४५२
.४०३०९०२

प्र.८५ क^२=अ^२+व^२-२ अवकोज्याका एष प्रकारोऽपि प्रकारान्तराभ्यां वा लघुरिक्थगणनायां परिवर्त्तयितुं शक्यः तद्यथा

कोज्याका=२कोज्या^{२} $\frac{का}{२}$ -१ तथा कोज्याका=१-२ ज्या^{२} $\frac{का}{२}$

अत्र तावत्प्रथमप्रकारस्य विशदीकरणं क्रियते–

क^२=अ^२+व^२-२अ वकोज्याका=अ^२+व^२-२अव$\left(२कोज्या^२\frac{का}{२}-१\right)$

=(अ+व)^२-४अवकोज्या^{२}$\frac{का}{२}$ (अ+व)^२ $\left\{१-\frac{४अव}{(अ+व)^२}२ कोज्या^२ \frac{का}{२}\right\}$

कल्प्यते $\frac{४ अव}{(अ+व)^२}$कोज्या^{२} $\frac{का}{२}$= कोज्या^{२}इ,

तदा क^२= (अ+व)^२ (१-कोज्या^{२} इ) = (अ+व)^२ ज्या^{२} इ

$\therefore$ क= (अ+व) ज्याइ, लक=ल (अ+व) + लज्याइ

तत्र इ कोणज्ञानायेदं समीकरणं ग्राह्यं कोज्याइ=

$\frac{२\sqrt{अव}}{अ+व}$कोज्या $\frac{का}{२}$ $\therefore$ ल कोज्याइ=ल २+$\frac{१}{२}$(लअ+लव)-

ल(अ+व)+ल कोज्या $\frac{का}{२}$। यतः२ $\sqrt{अव}$, अ+व अस्मान्न महत्तरः

तथा कोज्या $\frac{का}{२}$ धनात्मिका तथा रूपतोऽल्पा, कोज्या इ धनात्मिका

रूपाल्पा तेन इ कोणो न्यूनकोणः।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(३४) निम्नस्थप्रश्नेषु लघुरिक्थसारिण्या उपयोग आवश्यकः। अभ्यासार्थं प्रश्नाः–

१. यदि आवा=४५१७, आका=१५०, आ=३१° ३०', तदा शेषावयवज्ञानं क्रियताम्।

२. आ, वा, व एतेषां ज्ञानं क्रियतां यदि अ=३२४.६८, क= ४२१.७३, का=३५° १७' ,१२"

३. अ=३२१.७, क=४३५° ६, आ=३६°१८'२७" तदा का मानं किम्?

४. यदि व=१३२५, क=१६६५, वा=५२° १९' तदाऽत्राधिककोणत्रिभुज मानं साध्यताम्

५. यदि अ=३७९५, वा ७३°१५'१५", का=४२°१८'३०" अत्रेतरौ भुजौ कौ?

६. त्रिभुजद्वययोः कोणाः साध्यन्तां यत्र व=१७, क=१२, तथा का= ४३°१२'१२"

७. कस्यचित्त्रिभुजस्य भुजौ २.७४०२ तथा .७४०१ हस्ताः क्रमशः तथा तयोरन्तर्गतः कोणः ५९°२७'५" तदाऽऽधारः आधारोपरि लम्बश्च साध्यताम्

८. कस्मिंश्चित्त्रिभुजे आधारलग्नकोणयोरन्तरं १'७°४८' आधारलग्नभुजौ १०५°२५,७६°७५ हस्ताः तदा भुजयोरन्तर्गतकोणमानं साध्यताम्

९. (१) आ=४३°१५', आवा=३६°५, वाका=२०,
(२) आ=४३°१५' आवा=३६°५ वाका=३०,
(३) आ=४३°१५', आवा=३६°५ वाका=४५

एषु स्वरूपेशु कुत्र मानमसंभवं कुत्र सन्देहास्पदम् तथा यत्र मानमुचितं तत्र तृतीयभुजमानं साध्यताम्

१०. कस्मिंश्चित्त्रिभुजे क= (अ-व), छेइ इति साध्यतां यत्र

स्पइ= $\frac{२\sqrt{अव}}{अ-व}$ ज्या $\frac{का}{२}$। यदि अ=१७.३२, व= =१३.४७, का=४७.१३' तत्र आ, वा ज्ञानं विनैव कभुजज्ञानं क्रियताम्?

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

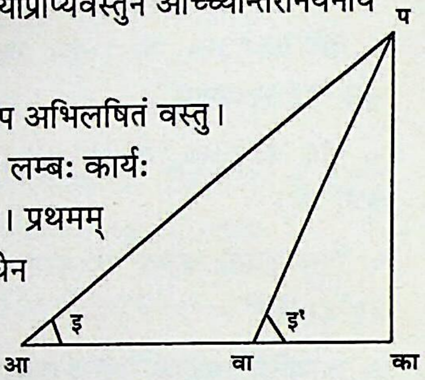
CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

द्वादशाध्यायः।

प्र.८६ औच्च्यान्तरानयने सुलभः प्रश्नाः जात्यत्रिभुजसम्बन्धकाः पूर्वमेव व्याख्याताः, इदानीमस्मिन्नध्याये सार्वत्रिकप्रश्नाः येषामुत्तर-करणे रेखागणितकौशलं त्रैकोणमितिकसिद्धान्तोपयोगश्चापेक्षितो भवति ते खलु वर्ण्यन्ते–

प्रथममेकधरातलीयगणितम्–

उ.१ क्षितिजधरातलोपरिस्थितसयाप्राप्यवस्तुन औच्च्यान्तरानयनाय विधिः।



कल्पयतां आ द्रष्टुः स्थानम्, काप अभिलषितं वस्तु। पविन्दुतः क्षिति-जधरातले पका लम्बः कार्यः तदा पका, आका ज्ञानमपेक्षितम्। प्रथमम् आ विन्दौ पआका उन्नतांशाः वेधेन ज्ञातव्याः ततः आ विन्दोः का दिशि आवा मानं विगणय्य पुनः वा विन्दौ पवाका उन्नतांशाः वेधेन ज्ञेयाः।

कल्प्यते < पआका=इ, < पवाका=इ^{१}, आवा=च,

तदा पवाका त्रिभुजात् पका=पवा ज्या इ^{१}

तथा पआवा त्रिभुजात् पवा= $\dfrac{\text{आवाज्यापआवा}}{\text{ज्याआपवा}} = \dfrac{\text{च ज्याइ}}{\text{ज्या(इ}^{१}\text{-इ)}}$

∵ पका=च ज्याइ ज्याइ^{१} कोछे (इ^{१}-इ)

तथा आका=पका कोस्पइ=च कोज्याइज्याइ^{१} कोछे (इ^{१}-इ)

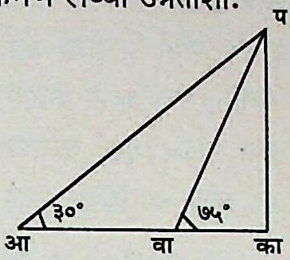
अत्रोपरिस्थितस्वरूपे लघुरिक्थे परिणमयितुं योग्ये, अतो यदि पका=य तदा लय=लच+लज्याइ+लज्याइ^{१}+लकोछे (इ^{१}-इ)

अत्रेदं स्मर्त्तव्यं यद् द्रष्टुरौच्च्यं न गण्यते, अतः उन्नतांशाः पृथिव्या माप्यन्ते।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

उ.२ सरलमार्गे गच्छा केनचित्पान्थेनाव्यवहितयोः क्रोशार्धस्थित-प्रस्थरयोः संमुखस्थं कमपि पर्वते विध्वा क्रमेण लब्धा उन्नतांशाः ३०°, ७५°, तदा पर्वतौच्च्यमानीयताम्।



अत्र क्षेत्रे, < पआका=३०°,
< पवाका=७५°, आवा=क्रोशार्धम्;
< आपवा=७५--३०°=४५°,
कल्प्यतां औच्च्यम्=य तदा य=

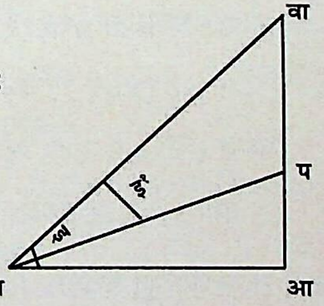
पवाज्या ७५° परन्तु पवा= $\dfrac{\text{आवाज्यापआवा}}{\text{ज्याआपवा}} = \dfrac{\text{१७६०ज्या३०°}}{\text{ज्या४५°}}$;

$\therefore$ य= $\dfrac{\text{१७६०ज्या३०°ज्या७५°}}{\text{ज्या ४५°}} = \text{१७६०}\dfrac{१}{२}\times\sqrt{२}\times\dfrac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}$

=४४०($\sqrt{३}$+१)। यदि $\sqrt{३}$=१.७३२ तदोच्च्यम्=३६०६.२४ फीटात्मकम्। अत्र ३ फीट=हस्तद्वयम्, १७६० ह.द्व.= क्रोशार्धम्

उ.३ कस्याश्चिन्नावः मस्तुलस्य ३/४ भागः नावः समतले यत्कोणं निर्माति तस्य स्पर्शरेखा यदि .६ तदा तस्मिन्नेव विन्दौ समस्तमस्तुलेन निर्मितकोणस्य स्पर्शरेखाप्रमाणं किम्?

कल्प्यतां का द्रष्टुःस्थानम् तथा आपवा मस्तुलम् तथा आप मस्तुलस्याधश्चतुर्थांशः



कल्प्यताम् आवा=४ च, येन आप=च;
तथा आका=व, तथा < आकावा=इ,
< वाकाप=इ१ येन स्पइ१=.६

पकाआ त्रिभुजात् स्प (इ-इ१)= $\dfrac{\text{च}}{\text{व}}$;

वाकाआ त्रिभुजात्, स्प इ= $\dfrac{\text{४च}}{\text{व}}$; $\therefore$ स्प इ=४ स्प (इ-इ१)

$$= \frac{\text{४ (स्पइ-स्पइ१)}}{\text{१+स्प इ स्प इ१}}$$

$$\therefore \text{स्प इ} = \frac{\text{४ (स्पइ- ३/५)}}{\text{१+३/५ स्पइ}} = \frac{\text{४ (५स्पइ-३)}}{\text{५+३स्पइ}}$$

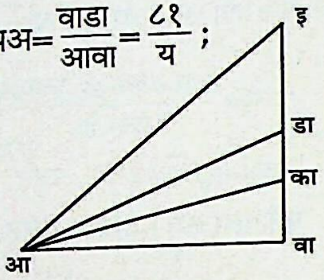
RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

समीकरणेन स्प^{२}इ-५ स्पइ+४=० ; ∴ स्पइ=१ वा, ४

उ.४ क्षितिजधरातले वाकाडा प्रा-सादोपरि उाइ वंशः, क्षितिजधरातलगत वाआ रेखाया आ विन्दौ यदि वाका तथा उाइ तुल्यकोणं निर्माति तदा वाआ प्रमाणं किम्? यद्यत्र वाका=९ ह, काडा=७२ ह, तथा डाइ=३६ह, कल्प्यतां ∠वाआका =∠डाआइ=इ∠डाआवा= अ, आवा=य हस्त

अत्र वाका=९ ह, वाडा=८१ ह, वाइ=११७ ह



$$\text{तदा स्प (अ+इ)}=\frac{\text{वाइ}}{\text{आवा}}=\frac{११७}{\text{य}}\ ;\ \text{स्पअ}=\frac{\text{वाडा}}{\text{आवा}}=\frac{८१}{\text{य}}\ ;$$

$$\text{स्पइ}=\frac{\text{वाका}}{\text{आवा}}=\frac{९}{\text{य}}$$

$$\text{परन्तु स्प (अ+इ)}=\frac{\text{स्पअ+स्पइ}}{१\text{-स्पअ स्पइ}}$$

$$\therefore \frac{११७}{\text{य}}=\frac{\frac{८१}{\text{य}}+\frac{९}{\text{य}}}{१-\frac{८१}{\text{य}}\cdot\frac{९}{\text{य}}}=\frac{९०}{\text{य}}\cdot\frac{\text{य}^{२}}{\text{य}^{२}-८१\times९}$$

$$११७\,\text{य}^{२}-८१\times९\times११७=९०\text{य}^{२},$$

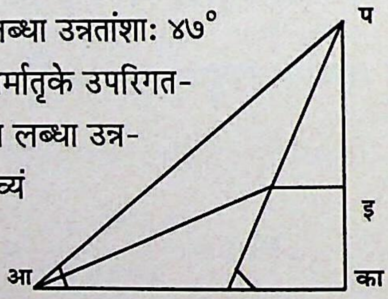
$$\therefore २७\,\text{य}^{२}=८१\times९\times११७,$$

$$\therefore \text{य}^{२}=८१\times३९\ \therefore \text{य}=९\sqrt{३९}$$

परन्तु $\sqrt{३९}$=६.२४५ संभवतः ∴ य=५६.२०५ संभवतः

∴ आवा=५६.२ हस्ताः संभवतः।

उ.५ केनचिद्द्रष्ट्रा पर्वताग्रं विध्वा लब्धा उन्नतांशाः ४७° पुनः क्षितिजधरातलेन ३२° कोणनिर्मातृके उपरिगतमार्गे १००० हस्तप्रमाणं गत्वा वेधेन लब्धा उन्नतांशाः ७७° तदा प्रथमद्रष्टुः पर्वतौच्च्यं कियत्। यदि ज्या ४७°=.७३१



RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

कल्प्यतां काप पर्वतौच्च्यम्। आ, वा द्रष्टुः स्थाने तदा क्षेत्रे ∠पआका =४७°, = ∠वाआका=३२°, ∠पडाका= ∠पवाइ=७७°, आवा= १०००ह, पका=य औच्च्यम् तदा य=पआ ज्या पआका=पआ ज्या ४७° अतः आवा सम्बन्धेन पआ मानमन्वेष्टव्यम्।

पआवा त्रिभुजे, ∠पआवा=४७°-३२°=१५°,

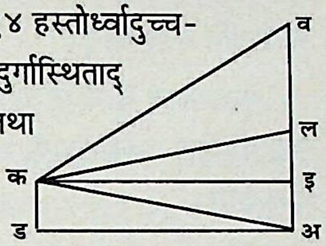
∠आपवा=७७°-४७°=३०°, ∴ ∠आवाप=१३५°,

$$\therefore \text{पआ} = \frac{\text{आवा ज्याआपाव}}{\text{ज्याआपवा}} = \frac{\text{१००० ज्या १३५}^\circ}{\text{ज्या ३०}^\circ} = \text{१०००}\sqrt{\text{२}}$$

$\therefore$ य=पआ ज्या ४७°=१०००$\sqrt{\text{२}}$×.७३१=७३१$\sqrt{\text{२}}$

यदि $\sqrt{\text{२}}$=१.४१४, तदा पर्वतौच्च्यम्=१०३४ह, संभवतः

उ.६ क्षितिजधरातलोपरि एकं दुर्गमस्ति, १४ हस्तोर्ध्वादुच्च-स्थानात्तथा क्षितिजधरातले ४८ हस्तान्तरे दुर्गास्थिताद् द्रष्टुर्दृष्टिर्दुर्गस्य कुत्रचिद्रन्ध्रे पतिता भवति तथा रन्ध्रादधोर्ध्वभागौ यदि द्रष्टुः स्थाने तुल्यकोणं निर्मी-तस्तथा रन्ध्रं यदि दुर्गमूलात् ३०हस्तान्तरे स्थितं तदा दुर्गौच्च्यं प्रवद?



कल्प्यते अव दुर्गम्। क द्रष्टुः स्थानम्, ल रन्ध्रम्। कड तथा कइ ऊर्ध्वाधरक्षितिजधरातलगते रेखे कार्ये, तथा कल्प्यतां अव=य तथा कड=१४, अड=इक=४८, वइ=य-१४। अडक त्रिभुजात् अक^{२}=(१४)^{२}+(४८)^{२}=२५००, ∴ अक=५०

कइव त्रिभुजात् कव^{२}=(य-१४)^{२}+(४८)^{२}=य^{२}-२८य+२५००

इदानीं ∠वकल=∠अकल; ∴ (रे ६।३) $\frac{\text{वक}}{\text{अक}} = \frac{\text{वल}}{\text{अल}}$

$$\therefore \frac{\sqrt{\text{य}^{२}\text{-२८ य+२५००}}}{\text{५०}} = \frac{\text{य-३०}}{\text{३०}}$$

वर्गीकरणेन ९ (य^{२}-२८य+२५००)=२५ (य^{२}-६० य+९००)

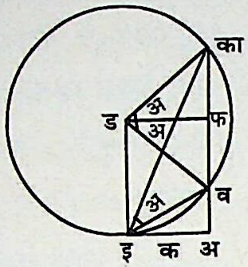
समशोधनादिना १६ य^{२}-१२४८ य=० यस्मात् य=७८

∴ दुर्गौच्च्यम्=७८ हस्ताः

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

उ.७ कस्यचिद् अव दुर्गस्योपरि एका वक वंशपताका विद्यते। दुर्गमूलाद् गच्छता केनचिद्द्रष्ट्रा दुर्गात् क अन्तरे इविन्दौ वेधेन लब्धाः परमोन्नतांशाः। यदि तादृशः अ कोणः= < वइका, तदा दुर्गौच्च्यं वंशपताकौन्नत्यं च क्रमशः क स्प$\left(\frac{\pi}{४}-\frac{अ}{२}\right)$ तथा २ कस्पअ



यतः इ विन्दुः अइ क्षितिजधरातलगतरेखायामस्ति यत्र वका परमाधिकं कोणं निर्माति तदैतत्साधनं सरलं यत् अइ रेखा कावइ त्रिभुजोपरिस्थवृत्तं स्पृशत्येव यतोऽन्यत्र विन्दौ अइ रेखायां लगति चेत्तदा तत्र काव रेखया निर्मितं कोणमानं अ कोणमानादधिकं भविष्यति तदयुक्तम्।

वृत्तस्यास्य केन्द्रं ड यच्च इ विन्दोरूर्ध्वाधररेखायामस्ति, वका रेखोपरि डफ लम्बः कार्यः तदा डफ, काव रेखां <काडव कोणञ्चार्धीकरोति।

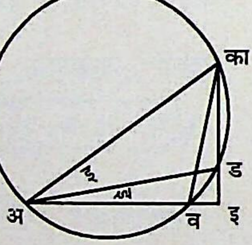
(रे ३।२०) युक्त्या <काडव=२ <काइव=२अ;

∴<काडफ=<वडफ=अ. ∴ काव=२काफ=२डफस्पअ=

२कस्पअ। पुनः<अइव=∠इकाव (रे) युक्त्या=$\frac{१}{२}$∠इडव

केन्द्रगत कोण=$\frac{१}{२}\left(\frac{\pi}{२}-अ\right)$ ∴ अव=कस्प अइव=कस्प $\left(\frac{\pi}{४}-\frac{अ}{२}\right)$

उ.८ क्षितिजधरातलोपरि स्थितायाः कस्याश्चिद्भित्तेरुपरि एका वंशपताकाऽस्ति। अस्मिन्धरातले कस्मिंश्चिद्विन्दौ यदि भित्तिर्वंशपताका च क्रमेण इ, इ[१]कोणौ निर्मीतः पुनः तस्मादेव विन्दोः वास्तवभित्तिदिशि कतुल्येऽन्तरेऽपि यदि वंशपताका इ[१]कोणमेव निर्माति तदा भित्तेरौच्च्यं वंशपताकौच्च्यं च किम्?



RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

कल्प्यतां इड भित्तिः, डका वंशपताका, अ, व विन्दू स्थाने तदा $\angle$काअड=इ'= <कावड $\therefore$ का, अ, व, ड विन्दवो वृत्तपरिधिस्थाः $\therefore$ <अवड=१८०°- <अकाइ=९०°+ (इ+इ'), काअइ त्रिभुजात्.

अतः अडव त्रिभुजे, <अडव=१८०-इ- {९०°+(इ+इ')}

= ९०°- (२इ+इ')

$\therefore$ अड= $\frac{\text{अव ज्या अवड}}{\text{ज्या अडव}} = \frac{\text{क कोज्या (इ+इ')}}{\text{कोज्या (२इ+इ')}}$

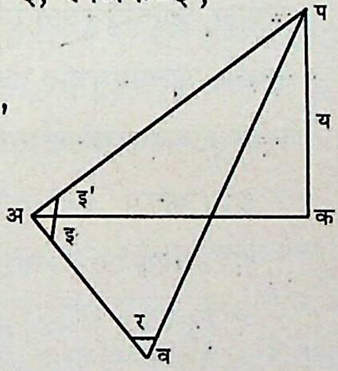
अतः अडइ त्रिभुजे, डइ=अडज्याइ= $\frac{\text{क ज्या इ कोज्या (इ+इ')}}{\text{कोज्या (२इ+इ')}}$

तथा काअड त्रिभुजे, काड= $\frac{\text{अड ज्या काअड}}{\text{ज्याअकाड}} = \frac{\text{अड ज्याइ'}}{\text{कोज्या (इ+इ')}}$

$= \frac{\text{क ज्याइ'}}{\text{कोज्या (२इ+इ')}}$

द्रव्यादिधरातलेषु गणना यथा–

प्र.८७ इतः पूर्वम् अव रेखायाः स्थितिः वास्तववस्तुनो दिशायामासीत् यद्येवं न तदा कल्प्यते कस्यामपि दिशि क्षितिजधरातल एव अव रेखा विद्यते अ विन्दौ वेधेन लब्धौ पअव, पअक कोणौ तथा व विन्दौ ज्ञातः पवअ कोणः कल्प्यतां <पअव=इ, <पअक=इ',



<पवअ=र, अव=अ, पक=य

तदा पअक, त्रिभुजात् य=पअ ज्या इ'

तथा पअव त्रिभुजात्

पअ= $\frac{\text{अव ज्यापवअ}}{\text{ज्याअपव}} = \frac{\text{अ ज्यार}}{\text{ज्या (इ+र)}}$

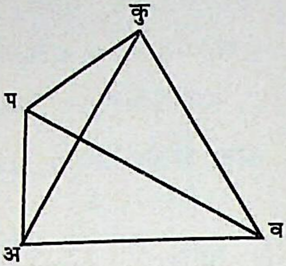
$\therefore$ य=अ ज्याइ' ज्यार कोछे (इ+र)

अप्राप्यवस्तुनोर्द्वयोर्ज्ञानोपायः। कल्प्यते प, कु वस्तुनी। क्षितिजधरातले द्वौ अ, व विन्दू गृहीत्वा तयोरन्तरं गणनीयम्।

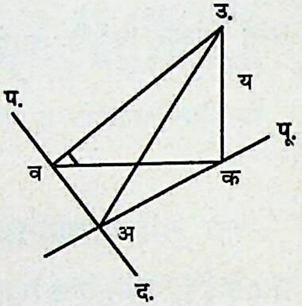
अ विन्दौ वेधेन पअकु, कोणं कुअव कोणं च विध्वा पुनर्यदि

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2



अप, अकु, अव रेखा एकस्मिन्नेव भूतले न भवेयुस्तदा वेधेन पअव कोणोऽपि मापनीयः। तथा व विन्दौ अवप, अवकु कोणौ गणनीयौ पअव त्रिभुजे ∠पअव, <पवअ, तथा अव, ज्ञातास्सन्ति तेन अप अपि ज्ञातो भवति एवं कुअव त्रिभुजे, <कुअव, <कुवअ, तथा अव ज्ञातास्सन्ति तेन अकु अपि ज्ञातो भवति पअकु त्रिभुजे, अप, अकु तथा ∠पअकु विदि-तास्सन्ति तेन पकु अपि ज्ञातो भवति।



उ.८ कस्यापि दुर्गस्य वास्तव-दक्षिणस्यां दिशि अविन्दौ वेधेन लब्धा उन्नतांशाः ३०° तथा अ विन्दोर्वास्तवपश्चिमस्यां दिशि व विन्दौ लब्धा उन्नतांशाः १८° यदि

अव=अ तदा दुर्गौच्च्यम् $= \frac{\text{अ}}{\sqrt{२+२\sqrt{५}}}$

कल्प्यतां कड=य

डकअ, जात्यत्रिभुजात् अव=य कोस्प ३०°

डकव, जात्यत्रिभुजात् वक=य कोस्प १८°

परन्तु <वअक कोणः समकोणः ∴ वक^{२}-अक^{२}=अ^{२};

∴ य^{२} (कोस्प^{२} १८°-कोस्प^{२} ३०°) = अ^{२};

∴ य^{२} (कोछे^{२} १८°-कोछे^{२} ३०°) = अ^{२};

∴ य^{२} {($\sqrt{५}$+१)^{२} -४}=अ^{२}

∴ य^{२} (२+२$\sqrt{५}$)=अ^{२} एतेनाभीष्टमौच्च्यं जातम्

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(३५) अभ्यासार्थं प्रश्नाः।

१. कस्यचित् पर्वतस्य पूर्वस्यां दिशि प विन्दौ उन्नतांशाः ४५° तथा प विन्दोर्वास्तवदक्षिणस्यां दिशि क विन्दौ उन्नतांशाः ३०°, प, क विन्द्वोरन्तरे यदि ५०० हस्ताः तदा पर्वतौच्च्यं किम्?

२. उत्तरवाहिन्याः गङ्गायाः वामपार्श्वे एकं दुर्गमस्ति। ऊर्ध्ववेगे तस्मि-न्नेव पुलिने अ विन्दोः यदि दुर्गस्योन्नतांशाः ६०° तथा अ स्थानाद्वि-रुद्धदिशि नद्याः अपरपुलिनस्थ व विन्दोर्दुर्गस्योन्नतांशाः ४५° तथा तत्र यदि दुर्गौच्च्यं ३६० हस्ताः तदा तत्र भागीरथ्याः विस्तृतिः का?

३. प्रकाशगृहस्य वास्तवदक्षिणस्यां दिशि स्थितः कश्चित्पुरुषः ऊर्ध्वस्थप्रकाशजनितस्वच्छायाः विस्तृतिं २४ हस्तरूपामवलोक-यति, तथा तस्माद्वास्तवपूर्वस्यां दिशि १०० हस्तप्रमाणं गत्वा स्वच्छायां त्रिंशद्धस्तात्मिकामवलोकयति। कल्प्यते पुरुषप्रमाणं ६ हस्ताः तदा पृथिव्याः किरणस्यौच्च्यं किम्?

४. समतलभूमौ कस्यांचित्सरलरेखायां अ, व, क विन्दवः सन्ति, क विन्दौ लम्बरूपेण स्थितः कश्चिच्छङ्कुः अविन्दौ ५°३०′ वविन्दौ १०°४५ उन्नतांशानुद्भावयति। अत्र यदि अव मानं १०० हस्ताः तदा शङ्कोरौन्नत्यं वक मानं च प्रवद?

५. क्षितिजधरातले डर दुर्गमस्ति, तथा तस्मिन्नेव धरातले अवकड एका सरलरेखा। यदि दुर्गशिखरवेधेन अ विन्दौ इ, वविन्दौ २इ, तथा क विन्दौ ३ इ कोणाः प्राप्यन्ते, पुनः यदि अव ५० हस्ताः तथा वक २० हस्ताः तदा दुर्गौच्च्यं कड अन्तरं च प्रवद?

६. कश्चित्प्रासादः अ, व विन्दुभ्यां दृष्टः, एषः अ विन्दोर्वास्तवोत्तरस्यां दिशि व विन्दोश्च पश्चिमोत्तरकोणे। व विन्दुः अ स्थानात् वास्तवपूर्व-स्यां दिशि १०० हस्तान्तरेऽस्ति यदि अ विन्दोः प्रासादस्योन्नतांशाः= इ तथा व विन्दोः उननतांशाः=९०-इ तदा प्रासादौच्च्यं साधय?

७. क्षितिजधरातले स्थितस्य कस्यचित्प्रासादस्य वास्तवदक्षिणस्यां दिशि

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

अ विन्दौ स्थितः कश्चिद् द्रष्टा प्रासादाग्रोन्नतांशान् ६०° अव-लोकयति ततः स एव द्रष्टा तस्माद्वास्तवपश्चिमायां दिशि व विन्दौ गत्वोन्नतांशात् ४५° पश्यति ततः पुनः वर्धित अवरेखायां क विन्दौ उन्नतांशान् ३०° पश्यति तदा व विन्दुः अ, क मध्यस्थाने स्थितो-ऽस्तीति साधय?

८. क्षितिजधरातले कस्मिंश्चिद्विन्दौ पर्वताग्रं विध्वा लब्धा उन्नतांशाः २२°१५' पुनस्तस्मिन्नेव भूतले सरलरेखायां क्रोशार्धं गत्वा वेधेन लब्धा उन्नतांशाः=१०°१२' तदा पर्वतौच्च्यं किम्?

९. पर्वताग्रात् क्षितिजधरातले क्रोशार्धान्तरे स्थितौ प्रस्थरौ विध्वा लब्धाः क्रमतोन्नतांशाः ५°, १०° तदा पर्वतौच्च्यं, प्रथमप्रस्थरपर्व-तान्तरं चाऽऽनय?

१०. एकस्मिन्नेव क्षितिजधरातले एकं दुर्गं एकः स्मारकस्तम्भश्च वरीवर्त्ति। दुर्गस्योन्नतिः १४० हस्ताः, दुर्गाग्रात् स्तम्भस्याग्रं मूलञ्च विध्वा लब्धाः क्रमत उन्नतांशाः ४०°, ८०° तदा स्तम्भस्यौच्च्यं किम्

११. कश्चित्पुरुषः कस्माच्चित् दुर्गाद्वास्तवदक्षिणस्यां दिशि क्षितिज-धरातले दुर्गमूलाद्गत्वा वेधेन दुर्गाग्रौन्नतांशान् ५४° १६' प्राप्तवान् पुनस्तस्मात् स्थानात् पूर्वस्यां दिशि १०० हस्तान् गत्वा पुनर्वेधेनोन-नतांशान् ५०° ८' प्राप्नोति तदा दुर्गौच्च्यं कथय।

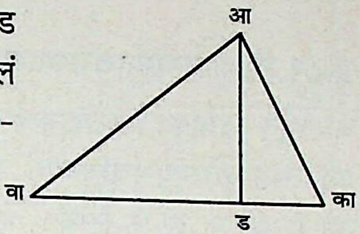
RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

त्रयोदशाध्यायः।

प्र.८८ त्रिभुजफलसाधनाय प्रकारः।

कल्प्यतां Δ इदं स्वरूपं त्रिभुज फलद्योतकम् तथा कल्प्यते आवाका त्रिभुजं तथा वाका आधारोपरि आड लम्बः (रे १।४१) युक्तया त्रिभुजफलं एकाधारस्यैकलम्बकस्य समानान्तरचतुर्भुजस्यार्धं भवति।



$$\therefore \Delta = \frac{१}{२}(\text{आ}+\text{लं}) = \frac{१}{२}\text{ वाका आड}=$$

$$\frac{१}{२}\text{ वाका आवा ज्यावा} = \frac{१}{२}\text{ अक ज्यावा}$$

एवमेव $\Delta = \frac{१}{२}$ अव ज्याका तथा $\Delta = \frac{१}{२}$ वक ज्याआ ...(१)

अतः सिद्धं फलम्।

$$\Delta = \frac{१}{२}\text{ भुजयोर्घातः} \times \text{ ज्या भुजान्तर्गतकोणः}$$

अनेनाऽवतरति, विशेषोक्तपद्यम्–

भुजमध्यगता जीवा क्षुण्णा दोष्णोर्वधेन सा।
दलिता त्रिभुजस्य स्यात्फलं वाऽन्यप्रकारतः॥

$$\text{पुनः } \Delta = \frac{१}{२}\text{ वक ज्याआ}=\text{वकज्या } \frac{\text{आ}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{आ}}{२}$$

$$= \text{वक}\sqrt{\frac{(\text{स-व})(\text{स-क})}{\text{वक}}} \cdot \sqrt{\frac{\text{स}(\text{स-अ})}{\text{वक}}}$$

$$= \sqrt{\text{स}(\text{स-अ})(\text{स-व})(\text{स-क})}$$

अत उपपन्नं "भुजसमासदलं हि चतुःस्थितं निजभुजैः क्रमशः परिहीनितम्" ब्रह्मगुप्तपद्यम्।

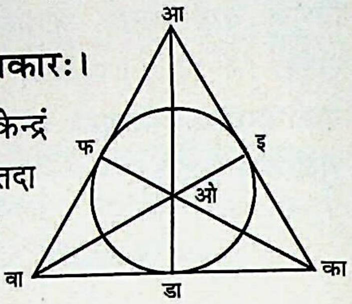
RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\text{पुनः } \Delta = \frac{\text{१}}{\text{२}}\text{वकज्याआ} = \frac{\text{१}}{\text{२}}\text{ज्याआ } \frac{\text{अज्यावा}}{\text{ज्याआ}} \cdot \frac{\text{अज्याक}}{\text{ज्याआ}}$$

$$= \frac{\text{अ}^{\text{२}}\text{ ज्यावा ज्याका}}{\text{२ ज्याआ}} = \frac{\text{अ}^{\text{२}}\text{ ज्यावा ज्याका}}{\text{२ ज्या (वा+का)}}$$

प्र.८९ त्रिभुजान्तर्गतवृत्तव्यासज्ञानाय प्रकारः।



कल्प्यते आवाका त्रिभुजान्तर्लग्नवृत्तस्य केन्द्रं ओ, तथा वृत्तस्पृष्टभुजविन्दवः ड, इ, फ तदा ओ ड, ओ इ, ओ फ लम्बाः, भुजेषु तथा व्यासार्धम्=र

अथेदानीं Δ = वाओका, काओआ, आओवा त्रिभुजफलानां योगः।

$$= \frac{\text{१}}{\text{२}}\text{अर} + \frac{\text{१}}{\text{२}}\text{वर} + \frac{\text{१}}{\text{२}}\text{कर} = \frac{\text{१}}{\text{२}}\text{(अ+व+क) र} = \text{सर},$$

$$\text{यध्यत्र स} = \frac{\text{अ+व+क}}{\text{२}} \text{ अतः र} = \frac{\Delta}{\text{स}} = \sqrt{\frac{\text{स (स-अ) (स-व) (स-क)}}{\text{स}}}$$

अथेकभुजस्य कोणानां च ज्ञानादस्येव व्यासार्धस्य प्रकारान्तरेणानयनम्। अथोर्ध्वस्थक्षेत्रे (रे ४।४) इदमपि ज्ञायते यत् त्रिभुजकोणार्धकर्तृरेखाणां योगविन्दुः ओ तेन $\angle\text{ओवाड} = \frac{\text{वा}}{\text{२}}, \angle\text{ओकाड} = \frac{\text{का}}{\text{२}}$

$$\therefore \text{वाड} = \text{र कोस्प } \frac{\text{वा}}{\text{२}}, \text{ काड} = \text{र कोस्प } \frac{\text{का}}{\text{२}} \therefore$$

$$\text{र}\left(\text{कोस्प}\frac{\text{वा}}{\text{२}} + \text{कोस्प }\frac{\text{का}}{\text{२}}\right) = \text{अ},$$

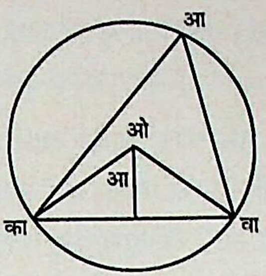
$$\because \text{र ज्या} \frac{\text{वा+का}}{\text{२}} = \text{अ ज्या}\frac{\text{वा}}{\text{२}}\text{ ज्या }\frac{\text{का}}{\text{२}},$$

$$\therefore \text{र} = \frac{\text{अ ज्या}\frac{\text{वा}}{\text{२}}\text{ ज्या }\frac{\text{का}}{\text{२}}}{\text{कोज्या }\frac{\text{आ}}{\text{२}}}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्र.९० त्रिभुजोपरिस्थवृत्तव्यासज्ञानाय प्रकारः।



आवाका त्रिभुजस्योपरिस्थवृत्तस्य केन्द्रं कल्प्यते ओ तथा व्यासार्धम् $\frac{\text{व्या}}{२}$, वाओका कोस्यार्धकारिणी रेखा ओड, या च वाका आधारस्याप्यर्धं करोति तदुपरि लम्बश्चापि भवेत् (रे ३।२०) तथा <वाओका केन्द्र-लग्नकोणः=२ <वाआकापरिधिलग्नको=२ आ

$$\text{तथा } \frac{\text{अ}}{२} = \text{वाड} = \text{वाओ ज्यावाओड} = \frac{१}{२}\text{व्या ज्याआ};$$

$$\therefore \frac{\text{व्या}}{२} = \frac{\text{अ}}{२\text{ ज्याआ}} \therefore \text{व्या} = \frac{२\text{अ}}{२\text{ ज्या आ}} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्या आ}}$$

$$\text{एवमेव} \frac{\text{अ}}{\text{ज्याआ}} = \frac{\text{व}}{\text{ज्यावा}} = \frac{\text{क}}{\text{ज्याका}} = \text{व्या}$$

$$= \frac{\text{अवक}}{\text{व क ज्या आ}} = \frac{\text{अवक}}{२\triangle} \because \triangle = \frac{\text{अवक}}{२\text{ व्या}}$$

आवाका त्रिभुजे यदि आ कोणादाधारोपरि लम्बः=ल

$$\text{तदा फ} = \frac{\text{ल}\cdot\text{अ}}{२} = \frac{\text{अवक}}{२\text{व्या}} \therefore \text{ल} = \frac{\text{वक}}{\text{व्या}}$$

$$\therefore \frac{\text{व्या}}{२} = \frac{\text{वक}}{२\text{ल}} \cdot \text{ एतेन}$$

त्रिबाहुकबहिर्लग्नवृत्तव्यासदलं किल।

भुजयोराहतेः खण्डाल्लम्बाप्तेन समं भवेदित्युपपद्यते संशोधकीयं पद्यम्।

वा, अ=व्या ज्या आ, व=व्या ज्या वा, क=व्या ज्या का

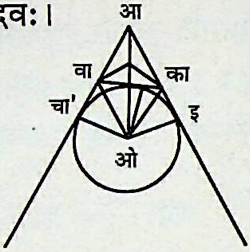
प्र.९१ त्रिभुजेऽन्तःकोणार्धकर्तृरेखाणां योगो यथाऽन्तर्भवति एवमेव शिरःकोणार्धकर्तृ तथाऽऽधारलग्नबहिःकोणार्धकर्तृरेखाणां योगविन्दुं केन्द्रं मत्वा तस्मादाधारोपरि या लम्बरेखा तद्व्यासार्धेन यद्वृत्तं तदाधारं

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

वर्धितभुजौ च स्पृशति तादृक् वृत्तं भुजबहिःस्पृक् वृत्तमित्युच्यते, एतादृग् वृत्तं त्रिप्रकारकं भवति, त्रयाणां कोणानां पृथक् पृथक् शीर्षस्थानकल्पनया। तादृशानां वृत्तत्रयाणां केन्द्राणि ओ" ओ' ओ''' तथा व्यासार्धानि च $\text{र}_{१}$ $\text{र}_{२}$ $\text{र}_{३}$। एतादृशस्य वृत्तस्य व्यासार्धानयनं यथा–

कल्प्यतां वाका आधारस्य आवा, आका वर्धितभुजयोश्च स्पर्शकारिवृत्तस्य केन्द्रं ओ" तथा ड', इ', चा' स्पर्शविन्दवः।



तदा ओ" केन्द्रात्तद्विन्दुगतरेखाः भुजोपरि लम्बरूपाः स्युः, कल्प्यतां $\text{र}_{१}$ वृत्तस्यास्य व्यासार्धम्

तदा Δ = आवाका त्रिभुजफलम्

= फल आवाओ" का-फल वाओ" का

= फ वाओ" आ+फ काओ" आ-फ वाओ" का

$$=\frac{१}{२}\text{कर}_{१}+\frac{१}{२}\text{वर}_{१}-\frac{१}{२}\text{अर}_{१}=\frac{१}{२}\text{र}_{१}(\text{क}+\text{व}-\text{अ})$$

$$=(\text{स}-\text{अ})\,\text{र}_{१};\qquad \therefore \text{र}_{१}=\frac{\Delta}{\text{स}-\text{अ}}$$

एवमेव $\text{र}_{२}=\frac{\Delta}{\text{स}-\text{व}}$, $\text{र}_{३}=\frac{\Delta}{\text{स}-\text{क}}$

तदेव व्यासार्धानयनं भुजस्यैकस्य ज्ञानात्तथा कोणार्धज्यादीनां वशतो यथा। पूर्वप्रदर्शितक्षेत्रे वा, का बहिःकोणार्धकर्तृरेखयोर्योगविन्दुः औ"

$$\text{तेन} < \text{ओ" वाड}'=\frac{१८०^{\circ}-\text{वा}}{२}=९०^{\circ}\,\frac{\text{वा}}{२},\ < \text{ओ" काड}'=९०-\frac{\text{का}}{२},$$

$$\therefore \text{वा ड}'=\text{र}_{१}\ \text{कोस्प}\left(९०^{\circ}-\frac{\text{वा}}{२}\right)=\text{र}_{१}\ \text{स्प}\,\frac{\text{वा}}{२},$$

$$\text{का ड}'=\text{र}_{१}\ \text{कोस्प}\left(९०^{\circ}-\frac{\text{का}}{२}\right)=\text{र}_{१}\ \text{सप}\,\frac{\text{का}}{२},$$

$$\therefore \text{र}_{१}\left(\text{स्प}\,\frac{\text{वा}}{२}+\text{स्प}\,\frac{\text{का}}{२}\right)=\text{अ},$$

$$\therefore \text{र}_{१}\,\frac{\text{वा}+\text{का}}{२}\,\text{ज्या}=\text{अ कोज्या}\,\frac{\text{वा}}{२}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{का}}{२}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\therefore र = \frac{अ \text{ कोज्या } \frac{वा}{२} \text{ कोज्या } \frac{का}{२}}{\text{कोज्या } \frac{आ}{२}}$$

$$\text{एवमेव } र_२ = \frac{व \text{ कोज्या } \frac{का}{२} \text{ कोज्या } \frac{आ}{२}}{\text{कोज्या } \frac{वा}{२}},$$

$$र_३ = \frac{क \text{ कोज्या } \frac{आ}{२} \text{ कोज्या } \frac{वा}{२}}{\text{कोज्या } \frac{का}{२}}.$$

तथा अ=व्या ज्या आ, व=व्या ज्या वा, क=व्या ज्या का एभिः

$$\text{स्वरूपैरुत्थापनेन } र = २ \text{ व्याज्या} \frac{आ}{२} \text{ ज्या} \frac{वा}{२} \text{ ज्या } \frac{का}{२},$$

$$र_१ = २ \text{ व्याज्या} \frac{आ}{२} \text{ कोज्या } \frac{वा}{२} \text{ कोज्या } \frac{का}{२},$$

$$र_२ = २ \text{ व्या कोज्या } \frac{आ}{२} \text{ ज्या} \frac{वा}{२} \text{ कोज्या} \frac{का}{२},$$

$$र_३ = २ \text{ व्या कोज्या} \frac{आ}{२} \text{ कोज्या} \frac{वा}{२} \text{ ज्या} \frac{का}{२},$$

साध्यताम्–

$$\textbf{उत्तर १} \quad \frac{र_१-र}{अ} + \frac{र_२-र}{व} = \frac{क}{र_३}$$

$$\text{प्रथमपक्षः} = \frac{१}{अ}\left(\frac{\triangle}{स-अ} - \frac{\triangle}{स}\right) + \frac{१}{व}\left(\frac{\triangle}{स-व} - \frac{\triangle}{स}\right)$$

$$= \frac{\triangle}{स(स-अ)} + \frac{\triangle}{स(स-व)} = \frac{\triangle(२स-अ-व)}{स(स-अ)(स-व)}$$

$$= \frac{\triangle क}{स(स-अ)(स-व)} = \frac{\triangle क(स-क)}{स(स-अ)(स-व)(स-क)}$$

$$= \frac{\triangle क(स-क)}{\triangle^२} = \frac{क(स-क)}{\triangle} = \frac{क}{र_३}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

उ.२ यदि $र_2=र_3+र=$ तदा त्रिभुजं जात्यमिति साध्यताम्

संशोधनेन $र_1-र=र_2+र_3$

$$\therefore २ \text{ व्या ज्या} \frac{आ}{२} \text{कोज्या} \frac{वा}{२} \text{कोज्या} \frac{का}{२} - २ \text{ व्या ज्या} \frac{आ}{२} \text{ज्या} \frac{वा}{२} \text{ज्या} \frac{का}{२}$$

$$= २ \text{ व्या कोज्या} \frac{आ}{२} \text{ज्या} \frac{वा}{२} \text{कोज्या} \frac{का}{२} + २ \text{ व्या कोज्या} \frac{आ}{२} - \text{कोज्या} \frac{वा}{२} \text{ज्या} \frac{का}{२}$$

$$\therefore \text{ज्या} \frac{आ}{२}\left(\text{कोज्या} \frac{वा}{२} \text{कोज्या} \frac{का}{२} \text{ज्या} \frac{वा}{२} \text{ज्या} \frac{का}{२}\right)$$

$$= \text{कोज्या} \frac{आ}{२}\left(\text{ज्या} \frac{वा}{२} \text{कोज्या} \frac{का}{२} + \text{कोज्या} \frac{वा}{२} \text{ज्या} \frac{का}{२}\right)$$

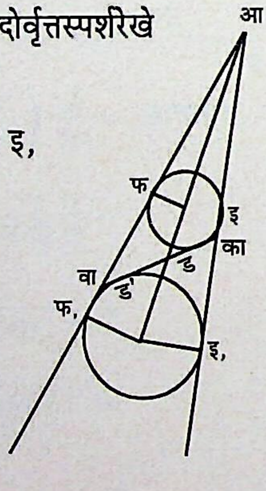
$$\therefore \text{ज्या} \frac{आ}{२} \text{कोज्या} \frac{(वा+का)}{२} = \text{कोज्या} \frac{आ}{२} \text{ज्या} \frac{(वा+का)}{२}$$

$$\therefore \text{ज्या}^२ \frac{आ}{२} = \text{कोज्या}^२ \frac{आ}{२}$$

$$\text{यस्मात्} \frac{आ}{२} = ४५^\circ \text{ तथा } आ = ९०^\circ$$

रेखागणितेन बहव उपयोगिनः सिद्धान्ता त्रिभुजस्य वृत्तस्य च सम्बन्धात् स्थापिता भवन्ति।

प्रश्न ९२ पूर्वप्रदर्शितयुक्तितः यत एकस्माद्बिन्दोर्वृत्तस्पर्शरेखे तुल्ये भवतस्तेन



अत्र आफ =आ इ, वाड=वाफ, काड=का इ,

∴ आफ +(वाड+काड)=भुजयोगार्धम्

∵ आफ +अ=स

∴ आफ =स-अ=आइ

एवमेव वाड =वाफ=स-व,

काड =काइ=स-क

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

तथा $र = आफ\ स्प\frac{आ}{२} = (स-अ)\ स्प\frac{आ}{२}$

एवमेव $र = (स-व)\ स्प\frac{वा}{२} \cdot र = (स-क)\ स्प\frac{का}{२}$

पुनः $आ\ फ_१ = आ\ इ_१,\ वा\ फ_१ = वाड_१,\ काइ_१ = काड_१,$

$\therefore २आफ_१ = आफ_१ + अइ_१, = (आवा + वाड_१)$

$+ (आका + काड_१) = भुजयोग$

$\therefore आफ_१ = स = आइ_१,$

$\therefore वाड_१ = वाफ_१ = स-क,\ काड_१ = काइ_१ = स-व$

तथा $र_१ = आफ_१\ स्प\frac{आ}{२} = स\ स्प\frac{आ}{२}$

एवमेव $र_२ = स\ स्प\frac{वा}{२},\ र_३ = स\ स्प\frac{का}{२}$

(३६) निम्नस्थप्रश्नाः साध्यन्ताम्।

१. $\sqrt{र\ र_१\ र_२\ र_३} = \triangle$

२. $स\ (स-अ)\ स्प\frac{आ}{२} = \triangle$

३. २ व्या रस=अ व क.

४. $र\ कोस्प\frac{वा}{२}\ कोस्प\frac{का}{२} = र_१$

५. $कोज्या\ \frac{आ}{२}\sqrt{वक\ (स-व)\ (स-क)} = \triangle$

६. $\frac{अ^२-व^२}{२} \cdot \frac{ज्याआ\ ज्यावा}{ज्या\ (आ-वा)} = \triangle$

७. अ कोज्या आ+व कोज्यावा+क कोज्याका

= २ व्या ज्याआ ज्यावा ज्याका

८. $अ\ कोस्पआ + व\ कोस्पवा + क\ कोस्पका = २\left(\frac{व्या}{२} + र\right)$

९. र (ज्याआ+ज्यावा+ज्याका)= व्या ज्याआ ज्यावा ज्याका

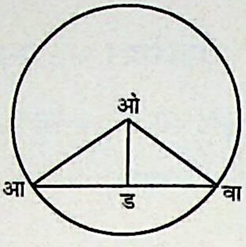
१०. $कोज्या^२\frac{आ}{२} + कोज्या^२\frac{वा}{२} + कोज्या^२\frac{का}{२} = २ + \frac{र}{व्या}$

११. $४\triangle(कोस्पआ + कोस्पवा + कोस्पका) = अ^२ + व^२ + क^२$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्र.९३ वृत्तान्तर्गतसमबहुभुजक्षेत्रस्य भुजयोगज्ञानाय फलज्ञानाय च प्रकारः।



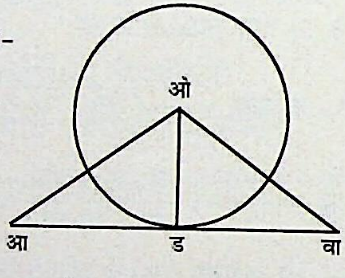
कल्प्यते र वृत्तव्यासार्धम् आवा समबहुभुजक्षेत्रस्यैको भुजः ओ वृत्तकेन्द्रम् तदा ओआ, ओवा रेखे विधेये तथा ओड, <आओवा कोणार्धकर्त्री रेखा कार्या तदेयं आवा रेखायाः समद्विभागं करोति तस्या उपरि लम्बरेखा च भवेत्। कल्प्यते भुजसंख्या=न

तेन <आओवा = $\frac{\text{१}}{\text{न}}$ (चत्वारः समकोणाः) = $\frac{\text{२}\pi}{\text{न}}$ तथा भुजानां

योगः=नआवा=२नआड=२नओआ ज्याआओड=२नर ज्या $\frac{\pi}{\text{न}}$

तथा बहुभुजक्षेत्रफलम्=न (फ आओवा) = $\frac{\text{१}}{\text{२}}$ नर$^{\text{२}}$ ज्या $\frac{\text{२}\pi}{\text{न}}$

प्र.९४ वृत्तबाह्यस्थस्य समबहुभुजक्षेत्रस्य भुजयोगज्ञानाय तथा फलज्ञानाय च प्रकारः।



कल्प्यते र वृत्तव्यासार्धम् तथा आवा समबहुभुजक्षेत्रस्यैको भुजः, कल्प्यतां आवा, ड विन्दौ वृत्तं स्पृशति तदा ओआ, ओवा, ओड, रेखाः कार्याः तदा ओड रेखा आओवा कोणार्ध करोति आवारेखोपरि लम्बश्च भवति। अत्रापि कल्प्यते भुजसंख्या=न।

∴ भुजानां योग=न आवा=२न आड=२नओड स्प आओड

∴ =२नर स्प $\frac{\pi}{\text{न}}$

बहुभुजक्षेत्रस्य फलम्=न (फल आओवा) = न ओड•आड =

नर$^{\text{२}}$ स्प $\frac{\pi}{\text{न}}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्र.९५ अथ वृत्तक्षेत्रफलसाधनम्

यथा कल्प्यते र वृत्तव्यासार्धम्

उपरि प्रदर्शितक्षेत्रतः बहुभुजक्षेत्रफ = न • फ आओवा

$$= न\left(\frac{१}{२} आवा \cdot ओड\right)$$

$$= \frac{१}{२} ओड \cdot न\ आवा = \frac{र}{२} \times बहुभुजक्षेत्रभुजयोगः$$

यद्यत्र बहुभुजक्षेत्रसंख्याप्रवर्धनं भवेत् तदा बहुभुजक्षेत्रभुजयोग एव परिधिमानं एवं बहुभुजक्षेत्रफलमानमेव वृत्तक्षेत्रफलं भवति तादृश्यां स्थितौ

$$वृत्तक्षेत्रफल = \frac{र}{२} परिधिः = \frac{र}{२}\ २\pi\ र = \pi र^२$$

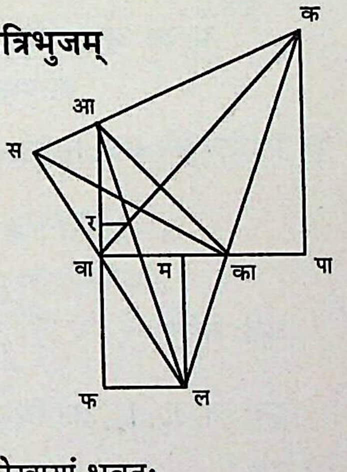
वृत्तखण्डफलज्ञानं यथा–

कल्प्यतां वृत्तखण्डस्य केन्द्रलग्नकोणः = इ

$$तदा\ (रे\ ६\ ।३३)\ \frac{वृत्तखण्डक्षेफ}{वृत्तफल} = \frac{इ}{२\pi};$$

$$\therefore\ वृत्तखण्डक्षेत्रफ = \frac{इ}{२\pi} \times \pi र^२ = \frac{१}{२} र^२ इ$$

प्र. ९६ बहिःकैन्द्रिकत्रिभुजम्



कल्प्यतां आवाका त्रिभुजं, यत्र $।_१\ ।_२\ ।_३$ भुजबहिःस्पर्शकारिवृत्तानां केन्द्राणि तदा $।_१\ ।_२\ ।_३$ त्रिभुजं आवाका त्रिभुजस्य बहिःकैन्द्रिकत्रिभुजमित्युच्यते। कल्प्यतां त्रिभुजान्तर्वृत्तस्य केन्द्रम्। तदाऽन्तः-केन्द्रबहिःकेन्द्रस्थितिज्ञानाय क्षेत्ररचनया निम्नलिखिताः विषयाः ज्ञायन्ते।

(क) $।।_१$ विन्दू वाआका, कोर्णार्धकर्तृ रेखायां भवतः

$।।_२$ विन्दू आवाका कोणार्धकर्तृरेखायां भवतः

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

तथा । ।$_{३}$ विन्दू आकावा कोणार्धकारिरेखायां भवतः

ख) ।$_{२}$,।$_{३}$ विन्दू वाआका बहिःकोणार्धकतृरेखायाम्

।$_{३}$ ।$_{१}$ विन्दू आवाका बहिःकोणार्धकतृरेखायाम्

तथा ।$_{१}$ ।$_{२}$ विन्दू आकावा कोणार्धकारिरेखायां भवतः

ग) आ ।$_{१}$ रेखा ।$_{२}$ ।$_{३}$ रेखोपरि लम्बरूपा, वा ।$_{२}$ रेखा ।$_{३}$ ।$_{१}$ रेखोपरि लम्बरूपा तथा का ।$_{३}$ रेखा ।$_{१}$ ।$_{२}$ रेखापरि लम्बरूप। अतः आवाका त्रिभुजं बहिःकैन्द्रिकत्रिभुजस्य ।$_{१}$ ।$_{२}$ ।$_{३}$ रूपस्य पादिकत्रिभुजम्।

घ) । वा ।$_{१}$ कोणस्तथा । का ।$_{१}$ कोणश्च समाख्यः, अतः का ।$_{१}$ विन्दवः वृत्तपरिधिस्थाः । एवं का, ।, आ, ।$_{२}$ तथा आ ।, वा, ।$_{३}$ विन्दवश्च वृत्तपरिधिस्थाः।

ङ) आ ।$_{१}$, वा ।$_{२}$, का ।$_{३}$ रेखाः अन्तः केन्द्रे। विन्दौ मिलन्ति अतः। विन्दुः ।$_{१}$ ।$_{२}$ ।$_{३}$ बहिःकैन्द्रिकत्रिभुजस्य दृढ़केन्द्रम्।

च) एवम् ।, ।$_{१}$ ।$_{२}$ ।$_{३}$ विन्दुषु प्रत्येकं शेषविन्दुत्रयगतस्य त्रिभुजस्य दृढ़केन्द्रम्।

प्र.९७ अथ बहिःकैन्द्रिकत्रिभुजस्य भुजज्ञानाय कोणज्ञानाय च प्रकारः।

पूर्व प्रदर्शितक्षेत्रे $<$वा ।$_{१}$ का= $<$वा ।$_{१}$ ।+ $<$का ।$_{१}$ ।

$$= <\text{वाका}\,। + <\text{कावा}\,। = \frac{\text{का}}{२} + \frac{\text{वा}}{२} = ९०^\circ - \frac{\text{आ}}{२}\,\bullet$$

अतः कोणाः $९०^\circ - \frac{\text{आ}}{२},\ ९०^\circ - \frac{\text{वा}}{२}\ ९०^\circ - \frac{\text{का}}{२}$

पुनः वा, ।$_{१}$, ।$_{२}$, का विन्दवः वृत्तपरिधिस्थाः

$\therefore <$ ।$_{१}$ ।$_{२}$ ।$_{३}$ = $१८०^\circ - <$ ।$_{३}$ वाका= $<$ ।$_{१}$ वाका।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$\because$ $I_१ I_२ I_३$, $I_१$ वाका त्रिभुजे सजात्तीये।

$$\therefore \frac{I_२ I_३}{\text{वाका}} = \frac{I_३ I_२}{I_१ \text{ का}} = \text{छे}\,(९०^\circ -)\frac{\text{आ}}{२} = \text{कोछे}\,\frac{\text{आ}}{२}$$

$$\therefore I_२ I_३ = \text{अ कोछे}\,\frac{\text{आ}}{२} = \text{२व्या कोज्या}\,\frac{\text{आ}}{२}\,.$$

अतो भुजाः $\text{२व्या कोज्या}\,\frac{\text{आ}}{२}$, $\text{२व्या कोज्या}\,\frac{\text{वा}}{२}$, $\text{२व्या कोज्या}\,\frac{\text{का}}{२}$

प्र.९८ बहिः कैन्द्रिकत्रिभुजस्य फलज्ञानाय तथा तत् त्रिभुजोपरिस्थवृत्तव्यासार्धानयनाय च प्रकारः।

$$\text{फ} = \frac{१}{२}\ \text{भुजयोर्घातः} \times \text{ज्याभुजान्तर्गतकोण}$$

$$= \frac{१}{२} \times \text{२व्या कोज्या}\,\frac{\text{वा}}{२} \times \text{२व्या कोज्या}\,\frac{\text{का}}{२} \times \text{ज्या}\left(९०^\circ - \frac{\text{आ}}{२}\right)$$

$$= \text{२व्या}^२\ \text{कोज्या}\,\frac{\text{आ}}{२}\ \text{कोज्या}\,\frac{\text{वा}}{२}\ \text{कोज्या}\,\frac{\text{का}}{२}$$

$$\text{इष्टवृत्तव्यासार्धम्} = \frac{I_२ I_३}{\text{२ज्या } I_२ I_१ I_३} = \frac{\text{२ व्या कोज्या}\,\frac{\text{आ}}{२}}{\text{२ ज्या}\left(९०^\circ - \frac{\text{आ}}{२}\right)} = \text{व्या}$$

प्र.९९ बहिःकेन्द्रान्तरकेन्द्रयोरन्तरज्ञानायोपायः।

पूर्व प्रदर्शितक्षेत्रे । वा $I_१$, । का $I_१$ कोणौ समकोणौ।

$\therefore$ $II_१$ रेखा वाका $I_१$ त्रिभुजोपरिस्थवृत्तस्य व्यासः।

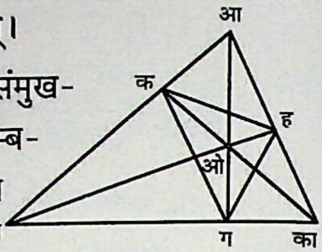
$$\because II_१ = \frac{\text{वाका}}{\text{ज्यावा } I_१ \text{ का}} = \frac{\text{अ}}{\text{कोज्या}\,\frac{\text{आ}}{२}}$$

अतोऽन्तराणि $\text{२व्या ज्या}\,\frac{\text{आ}}{२}$, $\text{२व्या ज्या}\,\frac{\text{वा}}{२}$, $\text{२व्या ज्या}\,\frac{\text{का}}{२}$.

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

पादिकत्रिभुजम्।



कल्प्यते आकावा त्रिभुजं यत्र कोणोभ्यस्तत्संमुख-भुजोपरि लम्बानां मूलानि ग, ह, क तदा लम्ब-मूलगतरेखाभिर्निर्मितं गहक त्रिभुजं आकावा त्रिभुजस्य पादिकत्रिभुजम्। लम्बानां योगविन्दुः ओ, एषः आवाका त्रिभुजस्य दृढ़केन्द्रम्।

प्र.१०० अथ पादिकत्रिभुजस्य भुजज्ञानाय कोणज्ञानाय चात्रोपायः

पूर्वक्षेत्रे इदं प्रदर्शितं यत् क, ओ, ग, वा विन्दवो वृत्तपरिधिस्थास्तेन <ओगक= <ओवाक=९०°- आ तथा ह, ओ, ग, का विन्दवोऽपि, वृत्तपरिधिस्था एव तेन

< ओगह = < ओकाह = ९०°- आ, ∴ <कगह = १८०°-२ आ.

अतः पादिकत्रिभुजस्य कोणाः=१८०°-२आ, १८०°-२वा, १८०°-२का.

पुनः आकह, आवाका त्रिभुजे सजातीये

$$\therefore \frac{\text{हक}}{\text{वाका}} = \frac{\text{आक}}{\text{आका}} = \text{कोज्याआ}, \therefore \text{हक} = \text{अ} \cdot \text{कोज्याआ}.$$

अतः पादिकत्रिभुजस्य भुजाः अ कोज्याआ, व कोज्यावा, क कोज्याका $\frac{\text{व्या}}{२}$ स्वरूपे परिणामिते त एवभुजाः $\frac{\text{व्या}}{२}$ ज्या२आ, $\frac{\text{व्या}}{२}$ ज्या२वा, $\frac{\text{व्या}}{२}$ ज्या२का

यद्यत्र निर्दिष्टआकावा त्रिभुजमधिककोणकं भवेत्तदा १८०°-२ का तथा ककोज्याका इति मानद्वयं ऋणात्मकम् तथा पूर्वागतमानेषु च वैलक्षण्यं भवेत् यतस्तस्यां स्थितौ कोणाः २आ, २वा, २का-१८०°, भुजाश्च अकोज्याआ, वकोज्यावा, -ककोज्याका।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्र.१०१ अथ पादिकत्रिभुजस्य फलानयनं वृत्तव्यासार्धानयनं च

$$\text{फलम्} = \frac{१}{२}(\text{भुजयोर्घातः}) \times \text{ज्याभुजयोरन्तर्गतकोण}$$

$$= \frac{१}{२}\frac{१}{२}\text{व्या ज्या२वा } \frac{१}{२}\text{व्या ज्या २ का ज्या } (१८०^{\circ}-२\text{आ})$$

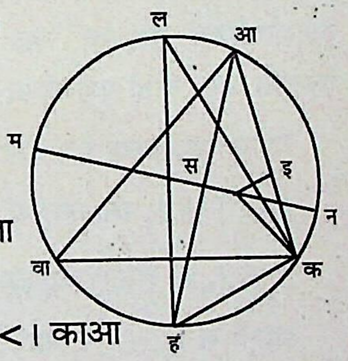
$$= \frac{१}{२}\left(\frac{१}{२}\text{व्या}\right)^{२} \text{ ज्या२आ ज्या२वा ज्या२का}$$

$$\text{तथा वृत्तव्यासार्धम्} = \frac{\text{हक}}{२\text{ज्याहगक}} = \frac{\frac{१}{२}\text{ व्या ज्या २ आ}}{२\text{ज्या } (१८०^{\circ}-२\text{आ})} = \frac{\frac{१}{२}\text{व्या}}{२}$$

वि.द्र. इदं पूर्वमेव प्रदर्शितं यत् ओग, ओह, ओक रेखाः क्रमशः हगक, कहग, गकह कोणानामर्धकारिण्यः अतः गहक त्रिभुजान्तर्गत-वृत्तस्य ओ केन्द्रम्। अतः कस्यापि त्रिभुजस्य दृढ़केन्द्रं पादिकत्रिभुजान्तर्वृत्तस्य केन्द्रम्।

एवम् ओग रेखोपरि लम्बरूपा कागवा रेखा <हगक वहिः कोणार्ध-कर्त्री तथैव आहका तथा वाकआ रेखे क्रमशः <कहग तथा <गकह बहिः कोणयोरर्धकारिण्ये अतः आवाका त्रिभुजं गहकपादिकत्रिभुजस्य वहिःकेन्द्रलग्नत्रिभुजम्।

प्र.१०२ त्रिभुजान्तर्गतवृत्तकेन्द्रत्रिभुजोपरिस्थवृत्तकेन्द्रयोरान्तर-ज्ञानाय प्रकारो यथा—



कल्प्यतां स त्रिभुजोपरिस्थवृत्तकेन्द्रं तथा। त्रिभुजान्तर्गतवृत्तस्य केन्द्रम् आ। रेखा वर्धिता बहिर्लग्नवृत्तपरिधिं ह विन्दौ छिनत्ति; काह, का। रेखे कार्ये। आका रेखोपरि। इ लम्बः कार्यः हस रेखा वर्धिता परिधि ल विन्दौ छिनत्ति तथा काल रेखा विधेया तदा <ह। का = <। आका + <। काआ

$$= \frac{\text{आ}}{२} + \frac{\text{का}}{२}, < \text{ह का।} = <\text{। कावा} + < \text{वाकाह}$$

$$= \frac{\text{का}}{२} + < \text{वाआह} = \frac{\text{का}}{२} + \frac{\text{आ}}{२} ;$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

∴ <हका । = <ह । का; ∴ ह । =हका=व्याज्या $\frac{आ}{२}$;

पुनः आ ।=। इ कोछे $\frac{आ}{२}$ = र कोछे $\frac{आ}{२}$; ∴ आ ।•। ह=व्यार

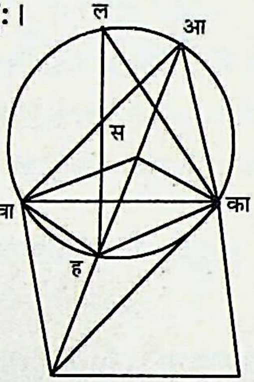
स । रेखा पार्श्वयोर्वर्धिता परिधौ म, न विन्द्वोर्योगं करोति तदा यतः मा । न, आ । ह वृत्तस्य पूर्णज्ये तेन (रे त ।३५) आ ।.। ह=म ।.। न=

$(\frac{१}{२}$व्या+स ।$)(\frac{१}{२}$व्या-स ।$)$ ∴ व्या र = $(\frac{१}{२}$व्या$)^{२}$-(स ।$)^{२}$

अर्थात् = (स।$)^{२}$ = $(\frac{१}{२}$व्या$)^{२}$- व्या र

प्र.१०३ त्रिभुजोपरिस्थवृत्तकेन्द्रबहिःकेन्द्रयोरन्तरज्ञानाय प्रकारः।

कल्प्यते स त्रिभुजोपरिस्थवृत्तकेन्द्रम् तथा। अन्तर्गतवृत्तकेन्द्रम् तदा आ। वर्धिता सती बहिःकेन्द्रं भित्वा याति यश्च बिन्दुः।



कल्प्यताम् आ ।$_{१}$ रेखा बहिर्लग्नवृत्तपरिधौ ह विन्दौ लगति, का ।, वा ।, काह, वाह, का ।$_{१}$, वा ।$_{१}$ रेखाः कार्याः ।$_{१}$ इ$_{१}$ लम्बश्च आ का रेखोपरि कार्यः, ह स रेखा वर्धिता परिधौ ल विन्दौ लगति, काल रेखा कार्या। यतः । वा ।$_{१}$ तथा । का$_{१}$ कोणौ समकोणौ अतः ।।$_{१}$ व्यासोपरिगतं वृत्तं वा, का विन्द्वोरुपरि च गच्छति वाह, काह पूर्णज्ये अ विन्दौ परिधौ तुल्यकोणनिर्मात्रिके तिष्ठतः

परन्तु पूर्वयुक्त्या हका=ह ।, ∴ हवा=हका=ह,

अतः । वा ।$_{१}$ का वृत्तस्य ह केन्द्रम्.

∴ ह ।$_{१}$ = हका=व्याज्या $\frac{आ}{२}$

इदानीं स ।$_{१}^{२}$-$(\frac{१}{२}$ व्या$)^{२}$ = ।$_{१}$ विन्दोः स्पर्शरेखावर्गः

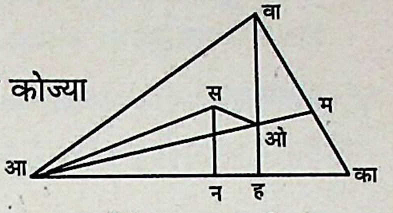
= ।$_{१}$ हX ।$_{१}$ आ=व्याज्या $\frac{आ}{२}$ •र$_{१}$ कोछे $\frac{आ}{२}$ = व्या र$_{१}$

∴ स ।$_{१}^{२}$। = $(\frac{१}{२}$व्या$)^{२}$ + व्या र$_{१}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्र.१०४ दृढ़केन्द्रत्रिभुजोपरिस्थवृत्तकेन्द्रयोरन्तरज्ञानायोपायः।



पूर्वप्रदर्शितक्षेत्रक्रमेणैव

सओ^२=सआ^२+आओ^२-२ सआ आओ कोज्या

सआओ इदानीं आस=$\frac{१}{२}$व्या;

आओ=आह कोछे का=

ककोज्याआ • कोछेका=व्याज्याका कोज्याआ कोछेका=व्या कोज्याआ।

<सआओ=<सआका-<ओआका=(९०°-वा)-(९०°-का)=का-वा

∴ सओ^२=($\frac{१}{२}$व्या)^२+व्या^{२}कोज्या^{२}आ-व्या^{२}कोज्याआ कोज्या (का-वा)

=($\frac{१}{२}$व्या)^२- व्या^{२} कोज्याआ{कोज्या (बा+का) कोज्या (का+बा)}

=($\frac{१}{२}$व्या)^२-२ व्या^{२} कोज्याआ कोज्यावा कोज्याका

एतादृशप्रकारेणाऽपि पूर्वप्रतिपादितसिद्धान्तयोर्ज्ञानं भवेत्।

(३७) अभ्यासार्थं प्रश्नाः साध्यन्ताम्।

१. आ विन्दुतः अन्तःकेन्द्रपर्यन्तम्=२ व्याज्या $\frac{वा}{२}$ ज्या $\frac{का}{२}$

२. बहिःकेन्द्र ।$_१$ विन्दोः आ, वा, का कोणपर्यन्तम्=

२ व्याकोज्या $\frac{वा}{२}$ कोज्या $\frac{का}{२}$, २ व्या ज्या $\frac{आ}{२}$ कोज्या $\frac{का}{२}$,

२ व्याज्या $\frac{आ}{२}$ कोज्या $\frac{वा}{२}$,

३. यदि ग, ह, च पादिकत्रिभुजस्य भुजाः तदा

(i) $\frac{ग}{अ^२}+\frac{ह}{व^२}+\frac{च}{क^२}=\frac{अ^२+व^२+क^२}{२ अवक}$ (ii) तथा $\frac{(व^२-क^२)ग}{अ^२}$ +

$\frac{(क^२-अ^२)ह}{व^२}+\frac{(अ^२-व^२)च}{क^२}$ = ० इति साध्यताम्

४. त्रिभुजोपरिस्थवृत्तस्य व्यासार्धं त्रिभुजान्तर्गतवृत्तव्यासात्कदाचिदपि नहि लघुतरम्।

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

५. यदि त्रिभुजोपरिस्थवृत्तव्यासार्धम्=२र अर्थादन्तर्गतवृत्तव्याससमं तदा त्रिभुजं समबाहुकम्

६. साध्येताम् (i) अ आ ।^{२}+ व वा ।^{२}+ क का ।^{२}=अवक

(ii) अ आ ।$_{१}^{२}$-व वा ।$_{१}^{२}$+ क का ।$_{१}^{२}$=अवक

७. साध्यताम् स ।^{२}+ स ।$_{१}^{२}$+ स ।$_{२}^{२}$+ स ।$_{३}^{२}$=३व्या^{२}

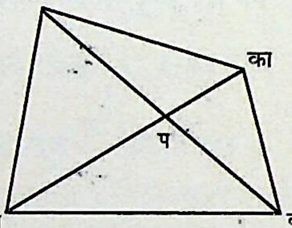
८. यदि गहक पादिकत्रिभुजं तदा आहक, वाकग, कागह त्रिभुजोपरिस्थवृत्तानां व्यासार्धानां योगः=$\frac{१}{२}$व्या+२

९. साध्यताम् ओस^{२}=९ ($\frac{१}{२}$व्या)^{२}-अ^{३}-व^{२}-क^{२}

चतुर्दशाध्यायः।

प्र. १०५ चतुर्भुजफलज्ञानम्।

विषमचतुर्भुजे कर्णयोर्घातः कर्णयोरुत्पन्नकोणज्यानिघ्नः द्विभक्तस्तदा चतुर्भुजफलं भवति।



कल्प्यतां आवाकाडा विषमचतुर्भुजं यस्य आका, वाडा कर्णौ प विन्दौ मिलतस्तथा कल्प्यताम् <डापआ कोणः=इ तथा चतुर्भुजक्षेत्रफलम्=स,

Δ डाआका=Δ आपडा + Δ कापडा

=$\frac{१}{२}$डाप•आप ज्या इ + $\frac{१}{२}$डाप•पका ज्या (π-इ)

=$\frac{१}{२}$डाप (आप+पका) ज्याइ=$\frac{१}{२}$डाप आका ज्याइ

एवमेव Δ आवाका=$\frac{१}{२}$वाप•आका ज्याइ

∴ स=$\frac{१}{२}$(डाप+वाप आका ज्याइ=$\frac{१}{२}$डावा आकाज्याइ)

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

प्र.१०६ अथेदानीं चतुर्भुजफलं भुजसम्बन्धेन सम्मुखकोणद्वययोगसम्बन्धेन च क्रियते

कल्प्यते आवाकाडा विषमचतुर्भुजं यस्य अ, व, क, ड भुजाः तथा स क्षेत्रफलम् वाआडा, वाकाडा त्रिभुजद्वयतो वाडा कर्णवर्गस्य मानमानीय यदि समीक्रियते

तदा $अ^2+ड^2-२$ अड कोज्याआ$=व^2+क^2-$वक कोज्या का

$\therefore अ^2+ड^2-व^2-क^2=$ २ अड कोज्याआ-२ वक कोज्या का ...(१)

तथा स=वाआडा, वाकाडा त्रिभुजफलयोर्योगः=

$$\frac{१}{२}\text{अड ज्याआ}+\frac{१}{२}\text{वक ज्याका}$$

$\therefore$ ४स= २ अड ज्याआ+ २ वक ज्याका ...(२)

(२) इत्यस्य वर्गे (१) अस्य वर्गयोजनेन जातौ पक्षौ—

$$१६स^2+(अ^2+ड^2-व^2-क^2)^2=४\,अ^2\,ड^2+४व^2क^2$$
$$-८\text{ अ व क ड कोज्या (आ+का)}.$$

कल्प्यतां आ+का= २इ, तदा

कोज्या (आ+का)=कोज्या २ इ+ = २ $कोज्या^2$ इ-१,

$$\therefore १६\,स^2=४\,(अड+वक)^2-(अ^2+ड^2-व^2-क^2)^2$$
$$-१६\text{ अ व क ड }कोज्या^2\text{ इ}$$

वर्गान्तरस्य योगान्तरघातसमत्वात्

$$१६स^2=(२अड+२वक+अ^2+ड^2-व^2-क^2)$$
$$(२अड+२वक-अ^2-ड^2+व^2+क^2)-१६\text{ अवकड }कोज्या^2\text{ इ}$$

$$=\{(अ+ड)^2-(व-क)^2\}\ \{(व+क)^2-(अ-ड)^2\}$$
$$-१६\text{ अ व क ड }कोज्या^2\text{ इ}$$

$$=(अ+ड+व-क)(अ+ड-व+क)(व+क+अ-ड)$$
$$(व+क-अ+ड)-१६\text{ अ व क ड }कोज्या^2\text{ इ}$$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$$\therefore \text{स}^2 = \left(\frac{\text{अ+ड+व-क}}{२}\right)\left(\frac{\text{अ+ड-व+क}}{२}\right)\left(\frac{\text{व+क+अ-ड}}{२}\right)$$

$$\left(\frac{\text{व+क-अ+ड}}{२}\right) - \text{अ व क ड कोज्या}^2\ \text{इ}$$

$$= (\text{योद-क})(\text{योद-व})(\text{योद-ड})(\text{योद-अ})$$

$$- \text{अ व क ड कोज्या}^2\ \text{इ}$$

$$\text{यदि गोद} = \frac{\text{अ+व+क+ड}}{२}$$

अतोऽत्र भुजानां ज्ञानात् सम्मुखकोणद्वययोगस्य च ज्ञानात् चतुर्भुज-फलं निष्पन्नम्

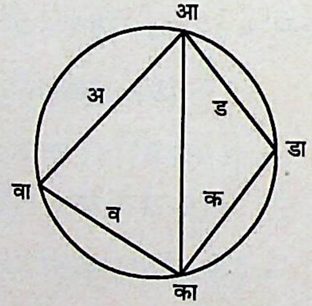
अनुमानं (१) यदि आ+का=२ इ=१८०° तदा इ=९०° तदा कोज्या इ=० • इयं स्थितिः वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजे भवति तेन ऋणस्वरूपस्य शून्य-त्वात् वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजफलम्=

$$\sqrt{(\text{योद-क})(\text{योद-व})(\text{योद-अ})(\text{योद-ड})}$$

(अनु.२) यदि ड+० तदा विषमचतुर्भुजं त्रिभुजसमं भवति तत्राऽप्यनेनैव प्रकारेण त्रि•फलम्+ $\sqrt{(\text{योद-अ})(\text{योद-व})(\text{योद-क})(\text{यो-द})}$

(अनु.३) विषमचतुर्भुजफलस्य स्वरूपदर्शनेनैवेदं स्फुटं यत् चतुर्भुजस्य तत्रैव परमं फलं यत्र अवकड कोज्या²इ इदं मानं परमाऽल्पं परंच वृत्तान्तर्गत चतुर्भुजक्षेत्रे अस्य मानस्य शून्यसमत्वात्तत्रैव चतुर्भुजफलस्य परमत्वम्।

प्र.१०७ अथ प्रकारान्तरेण वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजफलं साध्यते–



कल्प्यते आवाकाडा वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजक्षेत्रम् यस्य अवकड भुजाः, आका रेखा विधेया तदा

चतुर्भुजफलम्=आवाका त्रिभुजफलम्+आडाका त्रिभुजफलम्

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$= \frac{१}{२}$ अव ज्यावा+ $\frac{१}{२}$ कड ज्याडा= $\frac{१}{२}$ (अव+कड) ज्यावा,...(१)

(रे ३।२२) <वा=१८०°- <डा ∴ ज्यावा=ज्याडा

अत्र भुजसम्बन्धेन ज्यावा स्वरूपमेव गृह्यते तेन

अत्र $अ^२+व^२$-२ अव कोज्यावा=$आका^२=क^२+ड^२$-२ कड कोज्याडा

परन्तु कोज्याडा=कोज्या (१८०°-वा)= -कोज्यावा

अतः $अ^२+व^२$-२ अव कोज्यावा=$क^२+ड^२$+२ कड कोज्यावा

तेन कोज्यावा= $\frac{अ^२+व^२-क^२-ड^२}{२ (अव+कड)}$

तथा $ज्या^२वा$= १- $कोज्या^२वा$=१- $\frac{(अ^२+व^२-क^२-ड^२)^२}{\{२ (अव+कड)\}^२}$

$$= \frac{\{२(अव+कड)\}^२-(अ^२+व^२-क^२-ड^२)^२}{४ (अव+कड)^२}$$

$$= \left\{\frac{२ (अव+कड) + (अ^२+व^२-क^२-ड^२)}{४ (अव+कड)^२}\right\}$$

$$= \left\{\frac{२ (अव+कड) - (अ^२+व^२-क^२-ड^२)}{४ (अव+कड)^२}\right\}$$

$$= \left\{\frac{(अ^२+२ अव+व^२)-(क^२-२ कड+ड^२)}{४ (अव+कड)^२}\right\}$$

$$= \left\{\frac{(क^२+२ कड+ड^२) - (अ^२-व^२-२अव)}{४ (अव+कड)^२}\right\}$$

$$= \left\{\frac{(अ+व)^२ - (क-ड)^२ \times (क+ड)^२ - (अ-व)^२}{४ (अव+कड)^२}\right\}$$

$$= \frac{(अ+व+क-ड) (अ+व-क+ड) (क+ड+अ-व) (क+ड-अ+व)}{४ (अव+कड)^२}$$

कल्प्यतां अ+व+क+ड=२स

∴ अ+व+क-ड=(अ+व+क+ड) - २ड=२स-२ ड=२ (स-ड)

एवम् अ+व-क+ड=२ (स-क)

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

अ-व+क+ड=२ (स-व)

अ+व+क+ड=२ (स-अ)

$$\therefore \text{ज्या}^2\text{वा} = \frac{\text{२ (स-ड) X २ (स-क) X २ (स-व) X २ (स-अ)}}{\text{४ (अव+कड)}}$$

तेन (अव+कड) ज्यावा+२ $\sqrt{\text{(स-अ) (स-व) (स-क) (स-ड)}}$

अतश्चतुर्भुजफलम्= $\frac{१}{२}$ (अव+कड) ज्यावा=

$\sqrt{\text{(स-अ) (स-व) (स-क) (स-ड)}}$ (१) इत्यनेन अत उपपन्नं सर्वभुजैक्यं दलितमित्यादि।

$$\text{यतः कोज्यावा} = \frac{\text{अ}^2\text{+व}^2\text{-क}^2\text{-ड}^2}{\text{२ (अव+कड)}}$$

$$\therefore \text{आका}^2 = \text{अ}^2\text{+व}^2\text{-२अव कोज्या वा} = \text{अ}^2\text{+व}^2\text{-अव } \frac{\text{अ}^2\text{+व}^2\text{-क}^2\text{+ड}^2}{\text{अव+कड}}$$

$$= \frac{\text{(अ}^2\text{+व}^2\text{) कड+अव (क}^2\text{+ड}^2\text{)}}{\text{अव+कड}}$$

$$= \frac{\text{(अक+वड) (अड+वक)}}{\text{अव+कड}}$$

एवं इदमपि साधयितुं शक्यते $\text{वाडा}^2 = \frac{\text{(अव+कड) (अक+वड)}}{\text{(अड+वक)}}$

वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजे एवं कर्णज्ञानमपि कर्तुं शक्यते, अत एवात्र ब्रह्मगुप्तः

कर्णाश्रितभुजघातैक्यमुभयथाऽन्योन्यभाजितं गुणयेत्।
योगेन भुजप्रतिभुजवधयोः कर्णौ पदे विषमे॥

कर्णवर्गयोः परस्परगुणनेन–

$$\text{आका}^2 \cdot \text{वाडा}^2 = \frac{\text{(अक+वड) (अड+वक) (अव+कड) (अक+वड)}}{\text{(अव+कड) (अड+वक)}}$$

$$= \text{(अक+वड) (अक+वड)} = \text{(अक+वड)}^2$$

∴ आका वाडा=अक+वड=आवा काडा+वाका आडा

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

अनेन– **वृत्तान्तःस्थचतुर्बाहुक्षेत्रे श्रवणोर्हतिः।**
भुजप्रतिभुजाहत्योः समासेन समा भवेत्।

इति संशोधकोत्कमुपपद्यते।

पुनः चतुर्भुजोपरिस्थवृत्तव्यासार्धम् $= \frac{\text{आका}}{२\ \text{ज्यावा}}$ यतः इदमेव वृत्तं

आवाका त्रिभुजोपरिगतमतः प्र.९० युक्त्या

$$= \sqrt{\frac{(\text{अक}+\text{वड})(\text{अड}+\text{वक})}{\text{अव}+\text{कड}}}$$

$$\div ४\sqrt{\frac{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{व})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ड})}{(\text{अव}+\text{कड})^२}}$$

$$= \frac{१}{४}\sqrt{\left\{\frac{(\text{अव}+\text{कड})(\text{अक}+\text{वड})(\text{अड}+\text{वक})}{(\text{स}-\text{अ})(\text{स}-\text{व})(\text{स}-\text{क})(\text{स}-\text{ड})}\right\}}$$

उ. एकमेतादृशं आवाकाडा चतुर्भुजं वर्त्तते यस्यान्तर्बहिश्च वृत्तं रचयितुं शक्यते तदा स्प$^२\frac{\text{आ}}{२} = \frac{\text{वक}}{\text{अड}}$ इति साधय द्रष्टव्यं १०५ प्र. क्षेत्रम्

यतश्चर्भुजान्तर्वृत्ते एकसंमुखभुजयोर्योगः

अन्यसंमुखभुजयोर्योगतुल्यो भवेत् $\therefore$ अ+क=व+ड

यतश्चतुर्भुजं वृत्तान्तर्गतं तेन कोज्याआ$= \frac{\text{अ}^२+\text{ड}^२-\text{व}^२-\text{क}^२}{२(\text{अड}+\text{क})}$

परन्तु अ-ड=व-क, तेन $\text{अ}^२-२\text{अड}+\text{ड}^२=\text{व}^२-२\text{वक}+\text{क}^२$,

$\therefore \text{अ}^२+\text{ड}^२-\text{व}^२-\text{क}^२=२(\text{अड}-\text{वक})$,

$$\therefore \text{कोज्याआ}= \frac{\text{अड}-\text{वक}}{\text{अड}+\text{वक}},$$

$$\therefore \text{स्प}^२\frac{\text{आ}}{२} = \frac{१-\text{कोज्याआ}}{१+\text{कोज्याआ}} = \frac{\text{वक}}{\text{अड}}$$ इत्युपपन्नम्,

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

(३८) अभ्यासार्थं प्रश्नाः।

१. कस्यापि वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजस्य भुजाः ३, ३, ४, ४ तदैतदन्तर्गतं वृत्तमपि रचयितुं शक्यते इति प्रदर्श्यतां तथा वृत्तयोर्व्यासार्धमाने के?

२. कस्यचित् वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजस्य भुजाः ६०, २५, ५२, ३९ तदा प्रदर्श्यतामत्र द्वौ कोणौ समाख्यौ तथा कर्णयोर्मानं चतुर्भुजफलं च साध्यताम्?

३. कस्यापि चतुर्भुजस्य भुजाः ४, ५, ८, ९ तथैकः कर्णः .९ तत्र फलं साधय?

४. यदि वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजे वृत्तं चतुर्भुजान्तर्गतं निर्मातुं शक्यते तदा तस्य चतुर्भुजस्य फलम्

$= \sqrt{\text{अवकड}}$ तथा वृत्तव्यासार्धम् $= \sqrt{\text{अवकड}}\,(\text{अ}+\text{व}+\text{क}+\text{ड})$

५. यदि किमपि वृत्तं चतुर्भुजान्तर्गतं यस्य कर्णौ फ, ग तदा

$४\text{स}^2 = \text{फ}^2\text{ग}^2 - (\text{अक}-\text{वड})^2$

६. यदि फ, ग कस्यापि चतुर्भुजस्य कर्णौ तदा

$\text{स} = \frac{१}{४}\sqrt{४\,\text{फ}^2\text{ग}^2 - (\text{अ}^2+\text{क}^2-\text{व}^2-\text{ड}^2)^2}$

७. वृत्तान्तर्गतचतुर्भुजे एकस्य कर्णस्य खण्डयोर्घातः =

अवकड (अक+वड) (अव+कड) (अड+वक)

प्र.१०८ डिमोआइभरमहाशयस्य सिद्धान्तः।

न संख्यायाः यत्किमपि मानं भवतु धनात्मकं वा ऋणात्मकं पूर्णाङ्करूपं सच्छेदकं वा

$\text{कोज्या न इ} + \sqrt{-१}\ \text{ज्यानइ इदं} \left\{\text{कोज्याइ} + \sqrt{-१}\ \text{ज्याइ}\right\}^{\text{न}}$

अस्यैकं मानम्

$\text{कोज्याअ} + \sqrt{-१}\ \text{ज्याअ}$ इदं $\text{कोज्याव} + \sqrt{-१}\ \text{ज्याव}$ अनेन गुण्यताम् तदा गुणनफलम्=कोज्याअ कोज्याव-ज्याअ ज्याव+

$\sqrt{-१}\left\{\text{ज्याअ कोज्याव} + \text{कोज्याअ ज्याव}\right\}$

अर्थात् $\text{कोज्या}(\text{अ}+\text{व}) + \sqrt{-१}\ \text{ज्या}(\text{अ}+\text{व})$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

यद्यन्तिमस्वरूपं कोज्यार+$\sqrt{-१}$ ज्यार इत्यनेन गुण्यते तदा गुणनफलम्=कोज्या (अ+व+र) + $\sqrt{-१}$ ज्या (अ+व+र)

एव गुणनफलं साधितं भवति। कल्प्यते यद्यत्र गुणाऽवयवानां संख्या न तथा प्रत्येकगुणाऽवयवः कोज्याइ+ $\sqrt{-१}$ ज्याइ तदा

$\{$कोज्याइ+ $\sqrt{-१}$ ज्याइ $\}^{न}$+कोज्या न इ+ $\sqrt{-१}$ ज्यान

अत उपपन्नं यदा न धनात्मकं पूर्णाङ्करूपं च।

अथ यदा न मानं ऋणात्मकं पूर्णसंख्यातुल्यम्, कल्प्यते न= -म

तदा (कोज्याइ+ $\sqrt{-१}$ ज्याइ$)^{न}$ = (कोज्याइ+ $\sqrt{-१}$ ज्याइ) -म

$$= \frac{१}{(\text{कोज्याइ} + \sqrt{-१}\ \text{ज्याइ})} \text{म} = \frac{१}{(\text{कोज्या मइ} + \sqrt{-१}\ \text{ज्यामइ})}$$

हरभाज्यौ कोज्यामइ- $\sqrt{-१}$ ज्यामइ अनेन स्वरूपेण गुणनीयौ

$$\text{तदा स्वरूपम्} = \frac{\text{कोज्यामइ} - \sqrt{-१}\ \text{ज्यामइ}}{\text{कोज्या}^{२}\text{मइ} + \text{ज्या}^{२}\text{मइ}};$$

अर्थात् कोज्यामइ- $\sqrt{-१}$ ज्यामइ=कोज्या (-मइ) +

$\sqrt{-१}$ ज्या (-मइ) = कोज्यानइ+ $\sqrt{-१}$ ज्यानइ अत उपपन्नम्

एवं यदा न भिन्नाङ्कः अर्थात् न = $\frac{प}{क}$ तदा

(कोज्या + $\sqrt{-१}$ ज्याइ$)^{न}$ = (कोज्या + $\sqrt{-१}$ ज्याइ$)^{\frac{प}{क}}$

अतः पूर्वोक्तदिशा निर्दिष्टस्वरूपस्यैकं मानम्=कोज्या $\frac{पइ}{क}$ + $\sqrt{-१}$ ज्या $\frac{पइ}{क}$

अत उपपन्नं सर्वम्

एष सिद्धान्तः अ+व $\sqrt{-१}$ अस्य स्वरूपस्य वर्गमूल घनमूलाद्यानयनेमहानुपकारकः।

कल्प्यतेऽत्र अ=र कोज्याइ, व=र ज्याइ $\therefore$ र^{२}=अ^{२}+व^{२}, तथा स्पइ= $\frac{व}{अ}$

तदा अ+व $\sqrt{-१}$=र (कोज्याइ+ $\sqrt{-१}$ ज्याइ),

अतः (अ+व $\sqrt{-१}$ $)^{\frac{१}{३}}$=र$^{\frac{१}{३}}$ (कोज्याइ+ $\sqrt{-१}$ ज्याइ$)^{\frac{१}{३}}$

अतोऽत्र (कोज्याइ= $\sqrt{-१}$ ज्याइ$)^{\frac{१}{३}}$ इत्यस्यैकं मानम्=कोज्या $\frac{इ}{३}$

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

$+ \sqrt{-१}$ ज्या $\frac{इ}{३}$, द्वितीयतृतीयमाने च क्रमशः कोज्या $\frac{२\pi + इ}{३}$ $+ \sqrt{-१}$ ज्या $\frac{२\pi + इ}{३}$ तथा कोज्या $\frac{४\pi + इ}{३} + \sqrt{-१}$ ज्या $\frac{४\pi + इ}{३}$

अन्ये च बहवो विशेषाः सिद्धान्तादस्मादवगता भवन्ति तद्यथा

कोज्या न इ$+ \sqrt{-१}$ ज्या नइ$= \left\{ \text{कोज्या इ} + \sqrt{-१} \text{ ज्याइ} \right\}^{न}$

कल्प्यतेऽत्र न धनं तथा पूर्णसंख्यारूपम् तदा दक्षिणभागस्थस्वरूपस्य द्वियुग्पदसिद्धान्तेन विशदीकरणे कृते तथा सम्भवसंख्यायाः संभवसंख्यया, काल्पनिकसंख्यायाः काल्पनिकसंख्यया समीकृते जातौ पक्षौ

$$\text{कोज्यानइ} = \text{कोज्या}^{न} \text{ इ} - \frac{न(न-१)}{१.२} \text{कोज्या}^{न-२} \text{ इ ज्या}^{२}\text{इ}$$
$$+ \frac{न(न-१)(न-२)(न-३)}{|४} \text{कोज्या}^{न-४} \text{ इ ज्या}^{४}\text{इ} - \ldots$$

$$\text{ज्यानइ} = \text{न कोज्या}^{न-१}\text{इ ज्याइ} - \frac{न(न-१)(न-२)}{३} \text{कोज्या}^{न-३} \text{ इ ज्या}^{५}\text{इ}$$
$$+ \frac{न(न-१)(न-२)(न-३)(न-४)}{५} \text{कोज्या}^{न-५} \text{ इ ज्या}^{३}\text{इ} - \ldots$$

अमुं सिद्धान्तमधिकृत्य वहवश्चमत्कृता विचाराः वर्त्तन्ते परन्तु विस्तरभियाऽत्र विरमामि।

अभ्यासार्थं केचित्प्रश्नाः।

१. कोज्या ४ आ$+ \sqrt{-१}$ ज्या ४ आ

२. $(-१)^{\frac{१}{३}}$ अत्र मानानि साध्यानि

३. $(१+\sqrt{-१})^{\frac{१}{३}}$ अत्र त्रीणि मूलानि साध्यानि

४. यदि य+कोज्याइ+ $\sqrt{-१}$ ज्याइ, तथा $\sqrt{-१}$-क^{२}= नक-१, तदा १+क कोज्याइ $= \frac{क}{२न}(१+नय)(१+\frac{न}{य})$

इति सरलत्रिकोणमितिः समाप्ता।

***

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

उदाहरणमाला

उ.२७

(१) १०, ८, $-\frac{३}{२}$, $\frac{२}{३}$, -१ अत्राधाराः क्रमशः २, $\sqrt{३}$, ४, .००१, .०१

(२) ५, ३, ३, ४, ०. (३) ०, २, $\bar{२}$, $\bar{४}$, ३, $\bar{१}$ (४) २.८८५३६१३ (५) .३७१४३७३

(६) १.५४७५२८६ (७) १.९१६३८२२ (८) $\bar{१}$.४४१९०३० (९) $\bar{१}$.६९८९७००

(१०) १.८१२५९१९ (११) .०५०१७१६ (१२) लर=.३०१०३००

(१३) १.३२०४६९ (१४) .०२६०३१५

उ.२८

(१) ९.०७६२२६ (२) ३.०१८२४ (३) २४६७.२६६ (४) ३.३२

(५) ५.७७ (६) २.०५ (७) य=२लर=.६०२०६, र=२ ल५=-१.३९७९४

(८) य=$\frac{\text{लर३}}{\text{लर३-लर}}$=२.७१; र=$\frac{\text{लर}}{\text{लर३-लर}}$= य-१ = १.७१

(९) ३ (व-अ-क+२), $\frac{१}{२}$(२अ-३ क+६)

(१०) व+क-२, $\frac{१}{६}$(३ अ+२ व+३ क-५)

उ.२९

(६) $\frac{१}{२}$

उ.३०

(१) १३३°३४'४१" (२) ४९°२८'२६" (३) ५५°४६'१६"

(४) ७८°२७'४७" (५) ६४°३७'२३" (६) ३५°५४'९"

(७) ९३°३५' (८) वा=१००°४७'१", का=४८°५९'१६"

उ.३१

(१) ७९°६'२४" वा=४०°५३'३६" (२) आ=२४°१०'५७", वा=९५°४९'३"

(३) अ=२७°३८'४५" का=४८°५९'१६" (४) ८२°५७'१५", ३६°३२'४५"

(५) आ=७४°३२'४४", का=४८°५९'१६"

(६) वा=१००°४७'१", का=१४°१२'५९"

उ.३२

(१) ८९.६४६१६२ (२) २५५.३८६४ (३) ९२.७८८

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

उ. ३३

(१) ३२°२५'३५" (२) आ=१००°'३४', वा=३४°२६'

(३) आ=८१°४५'२" वा २३°२'५८"

उ.३४

(१) आ=५८°२४'४३", वा=४८°११'२३", का=७३°२३'५४"

(२) आ=२६°२४'२३", वा=११८°१८'२५", वा=६४२.७५६

(३) ५३°१७'५५", वा १२६°४२'५"

(४) आ=३१°३९'३३", का=९६°१'२७", अ=८७८.७५३

(५) व=४०२८.३८, क=२८३१.६७

(६) वा=७५°५३'२९", वा=१०४°६'३१", आ=६०°५४'१९",
वा=३२°४१'१७"

(७) आधरः=२.४४८४५ हस्ताः लम्बः=७१३३२१ हस्ताः

(८) ९०° संभवतः

(९) (१) असम्भवम् (२) सन्देहास्पदम् (३) ३२°४१'१७"

(१०) इ=७२°३१'५३", क=१२.८२५५

उ.३५

(१) १०६०.५ हस्ताः (२) १२०$\sqrt{६}$=२९४ हस्ताः

(३) १०६ हस्ताः (४) औचत्यम्=३९४.४ हस्ताः, अन्तरम्=४०६.४ हस्ताः

(५) ३३.०७ हस्ताः, १७ १/२ हस्ताः

(६) १००$\sqrt{\frac{४}{२}}$ हस्ताः (८) .३२११९ क्रोशार्धम्

(९) .१७३६४८२ क्रोशार्धम्; .९८४८०७८ क्रोशार्धम्

(१०) ११९.२८६२ हस्ताः (११) २३५.३१६७ हस्ताः

उ.३८

(१) २$\frac{१}{२}$, १$\frac{५}{७}$ (२) कर्णौ ६५, ६३, फलम्१७६४

(३) २$\sqrt{७७}$+६$\sqrt{११}$

***

॥ शमिति ॥

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

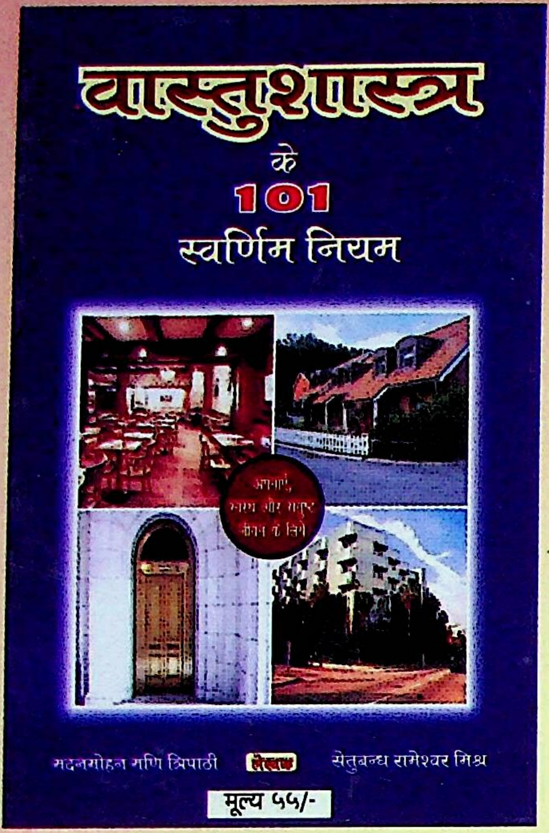
CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.

CC-0. In Public Domain. Digitization by eGangotri/Sarayu Trust. Funding IKS-MoE-Grant-2



यह वास्तुशास्त्र पर नवीनतम पुस्तक हैं हम सभी जानते है कि वास्तुदोष अमंगलकारी होता हैं प्रस्तुत पुस्तक के १०१ नियमों में भूमि क्रय से लेकर भवन, कारखाना, विद्यालय आदि के निर्माण तक आने वाले सभी वास्तुदोषो की पहचान एवं उनका निराकरण थोड़े से माध्यम से बड़े सुविधाजनक ढंग से एवं सरल भाषा में किया गया हैं। कोई भी व्यक्ति इसे पढ़कर बिना किसी वास्तुशास्त्री के सहयोग से वास्तु सम्बन्धी समस्याओं का समाधान कर सकता हैं। ये १०१ सूत्र समस्त वास्तुशास्त्र के निचोड़ हैं।

विद्वान् लेखकद्वय ने अपने दीर्घकालीन अनुभवों के आधार पर इसे लिखा है। इसकी उपयोगिता इसी से सिद्व होती है कि एक वर्ष के अन्तराल में यह दूसरा संस्करण पाठको के समक्ष प्रस्तुत हो रहा है।

प्रकाशक

शारदा संस्कृत संस्थान

जगतगंज, वाराणसी-२२१००२

(०५४२) २२०४१६८ (संस्थान) २४५२०३७ (आवास)

मूल्य 150/-

RajGuru Math, Shivala, Varanasi Collection. Equipment: Heritage Foundation, Jalgaon.